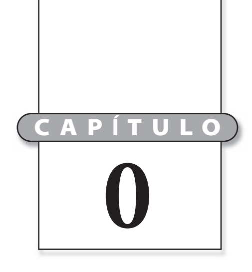



# Arte geométrico

## Resumen del contenido

En el Capítulo 0, los estudiantes conectan las ideas geométricas con cosas que ya conocen: formas comunes (círculos, hexágonos, pentágonos), simetría por reflejo exacto (o simetría de *reflexión*) y rectas y ángulos. Estudian matemáticas a través del arte, lo que puede ser un contexto nuevo y motivador para ellos. Este enfoque está diseñado para que se expandan y se conecten con la comprensión intuitiva que ya poseen sobre las formas en general. Además de repasar conceptos matemáticos conocidos, el Capítulo 0 presenta la simetría de rotación, construcciones con compás y regla no graduada y teselaciones.

El maestro de su estudiante puede seleccionar lecciones del Capítulo 0 para repasar habilidades e ideas que esta clase necesita para una mejor comprensión. También puede usar el Capítulo 0 como una pequeña introducción a los métodos de *Discovering Geometry* para lograr una comprensión a fondo a través de la investigación, el trabajo grupal y el uso de herramientas de geometría, y quizás software. Mientras tanto, usted puede utilizar este tiempo para ayudar a establecer los patrones de trabajo con su estudiante.

### Simetría de rotación

La mayoría de las personas dicen que una figura es *simétrica* si tiene simetría por reflejo exacto —un lado es el reflejo del otro. Existen también otros tipos de simetría. El Capítulo 0 presenta la simetría de rotación. Una figura tiene *simetría de rotación* de orden 2 si se ve igual después de haberla girado media vuelta —o sea, 180 grados. Tiene simetría de orden 3 si se ve igual después de haberla girado un tercio de vuelta —o sea, 120 grados, y así sucesivamente. La figura de la derecha por ejemplo tiene simetría de rotación de orden 3. Todas las figuras se ven iguales después de girarlas 360 grados, de modo que una figura que sólo satisface este requisito *no* es considerada como figura con simetría de rotación.



Los estudiantes volverán a ver simetrías de reflexión y de rotación en el contexto de las transformaciones del Capítulo 7.

### Teselaciones

Si puede hacer varias baldosas, todas de la misma forma y utilizarlas para cubrir una superficie plana, sin dejar espacios, entonces usted tiene una teselación, o patrón de embaldosado. En el Capítulo 0 los estudiantes ven unas pocas teselaciones. En el Capítulo 7, estudiarán las propiedades de las formas que se pueden utilizar en una teselación, como así también teselaciones con más de una forma.

### Construcciones

Los matemáticos de la Grecia antigua creían que las formas más perfectas eran los círculos y las líneas rectas, así que se pusieron a ver qué podían hacer con un compás (para trazar círculos) y una regla no graduada (para trazar rectas). Como compás, utilizaban una cuerda con una estaca atada a uno de los extremos. La regla no graduada no tenía marcas, así que no podía utilizarse para medir. Sin embargo, descubrieron que con estas herramientas podían construir muchas formas y ángulos. Todo lo que pueda dibujarse con estas herramientas se denomina *construcción geométrica.*

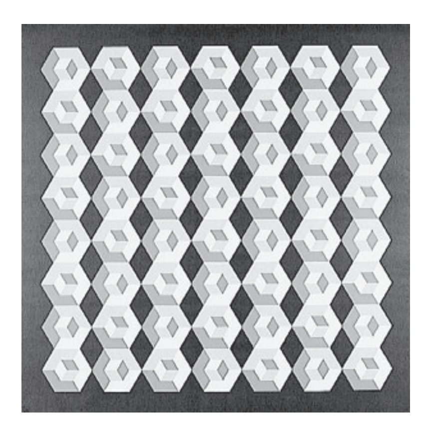
Aunque la mayoría de nosotros no tiene la misma idea de las formas perfectas que tenían los griegos hace 2500 años, el estudio de las construcciones geométricas es valioso para los estudiantes. Les proporciona una noción de formas y relaciones. Esta noción es muy útil al estudiar conceptos geométricos y para el razonamiento lógico.

**(continúa)**

## Problema resumen

Usted y su estudiante pueden hablar sobre este problema resumen del Capítulo 0. Es un buen problema para rever varias veces mientras avanzan en este capítulo.

¿Qué ideas de este capítulo ve en *Hot Blocks,* la ilustración artística que aparece en la página 24 y también a continuación?



*Hot Blocks*, (1966–67), Edna Andrade
© Edna Andrade, Museo de Arte de Filadelfia
comprado por el Philadelphia Foundation Fund.

Hable sobre estas preguntas con *su estudiante* desde el punto de vista de *un estudiante:*

- ¿Qué tipos de simetría tiene la ilustración?
- ¿Qué tipos de simetría tiene cada bloque?
- ¿Puedes construir uno de los bloques con una regla no graduada y un compás?
- ¿Qué hizo el artista para que cada bloque pareciera tridimensional?
- ¿Podrías construir un dibujo distinto pero similar con una regla no graduada y un compás?
- ¿Tu dibujo es más o menos elegante que éste?
- ¿Está bien hablar de elegancia en matemáticas?

Muchas de estas preguntas tienen varias respuestas válidas posibles. No importa si usted no sabe todas las respuestas. En lugar de eso, mientras hablan sobre las respuestas, asegúrese que su estudiante le dé buenas explicaciones de por qué una respuesta es razonable. Por ejemplo, contestar "si" o "no" no es suficiente. Incítelo a que también haga preguntas.

## Ejemplo de respuestas

Si se ignora el sombreado, la ilustración tiene una simetría de rotación de orden 2, con una recta de simetría vertical a través de la columna media de los bloques y una recta de simetría horizontal entre las hileras del medio de los bloques. Si se ignora el sombreado, cada bloque tiene un sistema de rotación de orden 3 y tres rectas de reflexión. Los patrones de sombreado hacen que parezca tridimensional. Los dos hexágonos que forman cada bloque pueden construirse: Comenzando con círculos y usando sus radios para marcar seis arcos iguales en el círculo, los puntos se pueden determinar puntos para dibujar hexágonos equiláteros con los cuales hacer los bloques.

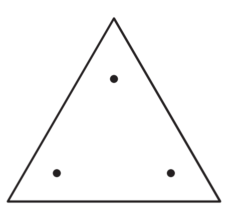
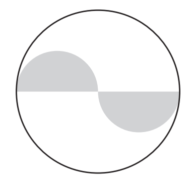
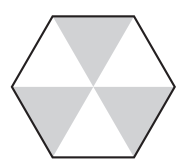
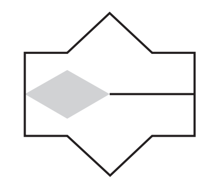
Aunque la elegancia es cuestión de opinión, es aceptable hablar de elegancia en cualquier disciplina. Esta ilustración podría considerarse elegante por su valor artístico o por las matemáticas que exhibe.

# Capítulo 0 • Ejercicios de repaso

**Nombre** ______________________ **Período** __________ **Fecha** ____________

1. *(Lección 0.1)* ¿Cuáles de los siguientes dibujos tienen simetría de reflexión? Dibuja las rectas de simetría. ¿Cuáles de los dibujos tienen simetría de rotación?

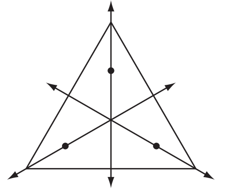
2. *(Lección 0.2)* Nombra las herramientas básicas de geometría. ¿Para qué se usan estas herramientas?

3. *(Lección 0.3)* Usa tu compás para crear un dibujo de una margarita de 6 pétalos. Coloréalo de manera tal que tenga simetría de reflexión pero no de rotación.

4. *(Lección 0.4)* Usa tu regla no graduada y una copia del dibujo de tu margarita del Ejercicio 3 para hacer un hexágono regular. Úsalo para hacer un bloque de la colcha amish con diseños de bloques que aparece en la página 14.

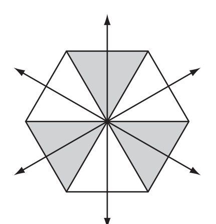
## SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 0

**1.**



Rotación y reflexión

Rotación

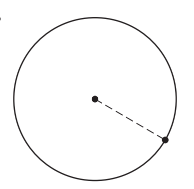


Rotación y reflexión

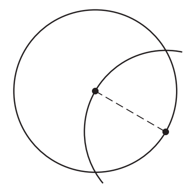
Reflexión

**2.** El compás se usa para hacer círculos y marcar distancias iguales y la regla no graduada se usa para dibujar líneas rectas.

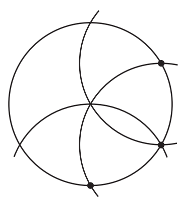
**3.**



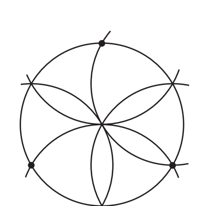
Paso 1



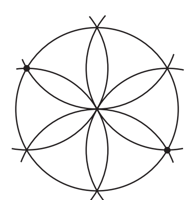
Paso 2



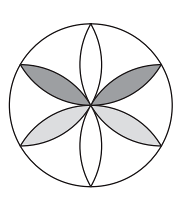
Paso 3



Paso 4

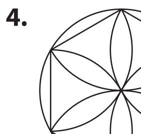


Paso 5

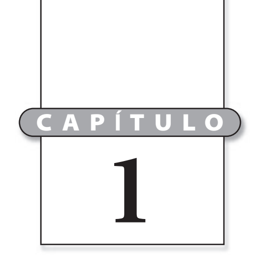


Paso 6

**4.**






# Introducción a la geometría

## Resumen del contenido

El Capítulo 1 presenta los fundamentos y vocabulario de geometría. Aunque se refiere a muchas formas geométricas que los estudiantes ya han visto antes, hace hincapié en lo que se necesita para poder formular buenas definiciones. Muchas de estas investigaciones hacen participar a los estudiantes en el proceso de redacción de definiciones presentándoles ejemplos visuales de formas que pertenecen a un grupo y formas que no pertenecen al grupo, llamado los no ejemplos. Este proceso hace que los estudiantes pasen de pensar en la apariencia general de las formas hacia pensar en sus partes y en las clases de formas, por ejemplo, pensar en lo que todos los rectángulos tienen en común y qué los hace rectángulos. Esto establece las bases para entender las propiedades de la formas, un nivel superior de razonamiento que pasa a ser cada vez más importante en los capítulos posteriores.

### Definiciones

Una buena definición generalmente puede formularse como "Un [*término que se trata de definir*] es un/a [*grupo general*] que [*tiene alguna característica*]". Por ejemplo, considere la definición de triángulo.

Un **triángulo** es un polígono que tiene tres lados.

Para que esta definición sea clara debemos saber el significado de los términos usados en la definición. ¿Qué significa polígono? ¿Qué significa lado de un polígono? Todos los términos usados en una definición válida deberían ya estar previamente definidos. Pero esto conlleva a un problema: ¿Por dónde empezamos? Debemos ponernos de acuerdo de que algunos términos se entiendan sin ser definidos. Entonces se pueden usar para definir la primera definición, que a su vez se puede usar en otras definiciones. En geometría, estos términos sin definir son **puntos, recta** y **plano**. A partir de estos términos, podemos definir otros términos, que luego se pueden usar para definir los términos triángulo y ángulo en el ejemplo original anterior.

Los puntos son **colineares** si están en la misma recta.

Un **segmento de recta** consiste de dos puntos (llamados extremos) y todos los puntos comprendidos entre ellos que son colineares con los dos puntos.

Un **polígono** es una figura cerrada en un plano que se forma conectando segmentos extremo con extremo (llamados vértices) con cada segmento intersecando exactamente otros dos.

Un **lado de un polígono** es un segmento que conecta vértices consecutivos del polígono.

Mientras que estas definiciones tal vez no estén descritas exactamente de la misma forma que al principio de esta sección, la mayoría se basa en la *clasificación* del término dentro de un grupo general, luego su *diferenciación* del grupo de acuerdo a algunas características.

### Ángulos

Además de definir *ángulos,* el libro habla sobre las medidas de los ángulos y les pide a los estudiantes que escriban las definiciones de distintos tipos de ángulos (recto, agudo, obtuso), así como pares especiales de ángulos (complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice, par linear).

### Polígonos

El libro define *polígono* y le pide a los estudiantes que escriban las definiciones de tipos especiales de polígonos (equilátero, equiángulo, regular). Los estudiantes

**(continúa)**

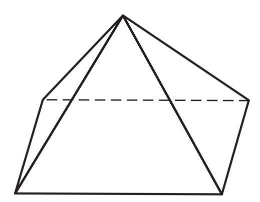
también definen distintos tipos de triángulos (rectángulo, agudo, obtuso, escaleno, equilátero, isósceles) y cuadriláteros (trapecio, papalote, paralelogramo, rombo, rectángulo, cuadrado).

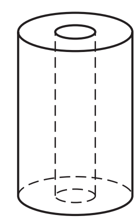
### Círculos

Un *círculo* es la serie de todos los puntos en un plano a una distancia dada desde un punto dado. Los estudiantes repasan algunas partes del círculo (centro, radio, arco) y definen otras partes (cuerda, diámetro, tangente).

## Problema resumen

¿Qué formas geométricas contiene cada uno de estos sólidos?





Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Cómo se llama cada sólido?
- ¿Hay partes de los sólidos que están escondidas en estos dibujos?
- ¿Cómo son las partes escondidas?
- ¿Qué partes se mencionan es este capítulo?
- ¿Cuáles de esas formas están contenidas en los sólidos? ¿Las puedes colorear?
- ¿Hay alguna de esas formas que no esté contenida en los sólidos?
- ¿Puedes cambiar estos sólidos a alguno que no contenga esas formas?
- ¿Qué relaciones geométricas se mencionan en el capítulo?
- ¿Cuáles de esas relaciones tienen las formas de los sólidos?
- ¿Qué medidas se mencionan en el capítulo?
- ¿Puedes tomar alguna de esas medidas en estos sólidos?

## Ejemplo de respuestas

Juntas, las formas —una pirámide rectangular y un cilindro atravesado por un hoyo cilíndrico— contienen segmentos, puntos colineares y coplanares (vértices) ángulos agudos y rectos, triángulos, un rectángulo y círculos concéntricos. El fondo del cilindro, el interior del hoyo cilíndrico y el triángulo de atrás en la pirámide están escondidos y no se ven. Otros términos en el capítulo incluyen semirrecta; ángulos opuestos por el vértice, polígonos de varios tipos, incluyendo varios cuadriláteros; muchas rectas relacionadas con los círculos, incluyendo tangente y otros sólidos, incluyendo cilindros, conos y esferas. Es posible hacer alguno de esos polígonos tomando una "sección" o cortando en rebanadas la pirámide.

Las relaciones mencionadas en el capítulo incluyen bisecciones, congruente, perpendicular, paralelo, rectas oblicuas y ángulos suplementarios y complementarios. En las figuras pareciera que: La base de la pirámide tiene aristas perpendiculares entre sí y aristas opuestas congruentes entre sí; las bases del cilindro son paralelas entre sí; y si los triángulos son equiláteros o isósceles, tienen ángulos y aristas congruentes. El dibujo tal vez no represente los verdaderos ángulos o longitudes de los lados, pero de lo contrario podría hallar la medida de cada ángulo con un transportador y la longitud de cada lado con una regla.

# Capítulo 1 • Ejercicios de repaso

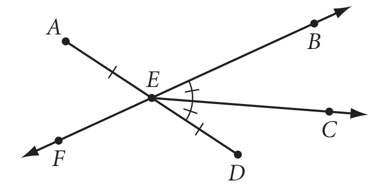
**Nombre** ________________________ **Período** __________ **Fecha** __________

*(Lecciones 1.1, 1.2)* Identifica lo siguiente:

**1.** Punto medio: ______ **2.** Segmento: ______

**3.** Mediatriz: ______ **4.** Semirrecta: ______

**5.** Recta: ______ **6.** Ángulo: ______

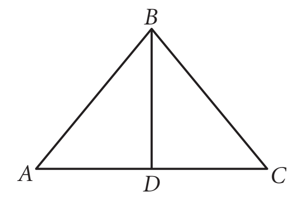



**7.** *(Lección 1.2)* Marca la figura con la siguiente información:

$\angle A \cong \angle C$

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

$BD \perp DC$




*(Lecciones 1.3, 1.5, 1.6, 1.7)* Dibuja y rotula cuidadosamente cada figura.

**8.** Ángulos suplementarios $\angle ABD$ y $\angle DBC$ siendo $m\angle ABD = 90°$

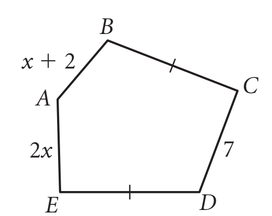
**9.** Triángulo isósceles rectángulo **10.** Círculo $O$ con diámetro $\overline{AB}$ y tangente $\overleftrightarrow{CD}$

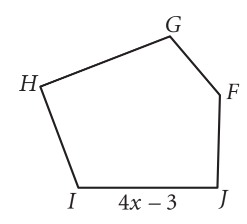
**11.** Paralelogramo $ABCD$

**12.** *(Lección 1.4)* $ABCDE \cong FGHIJ$. El perímetro de $ABCDE$ es de 36 cm.
Halla estas distancias.

**a.** $AB =$ ______ **b.** $HI =$ ______

**c.** $FJ =$ ______

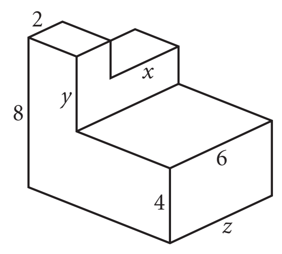



**13.** *(Lección 1.8)* Halla las longitudes faltantes. Haz de cuenta que todas las aristas son perpendiculares entre sí.

**a.** $x =$ ______ **b.** $y =$ ______

**c.** $z =$ ______




**14.** *(Lección 1.9)* Crea un diagrama de Venn para mostrar las relaciones entre los triángulos, triángulos isósceles y triángulos rectángulos.

# SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

**1.** $E$ es el punto medio de $\overline{AD}$ porque $\overline{AE} \cong \overline{ED}$.

**2.** Hay varios segmentos, por ejemplo $\overline{AE}$ o $\overline{AD}$.

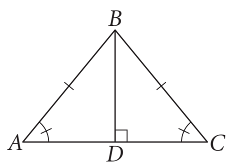
**3.** $\overrightarrow{EC}$ es la bisectriz del ángulo porque $\angle BEC \cong \angle CED$.

**4.** Hay varias semirrectas, por ejemplo $\overrightarrow{BF}$ o $\overrightarrow{EC}$

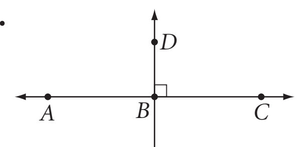
**5.** $\overleftrightarrow{FB}$

**6.** Hay varios ángulos, por ejemplo $\angle BEC$ o $\angle BED$.

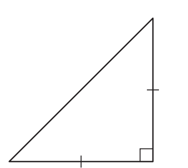
**7.**



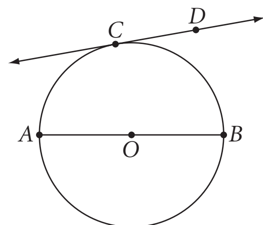

**8.**



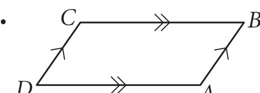

**9.**



**10.**



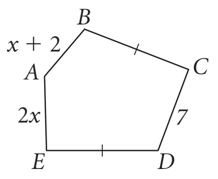

**11.**

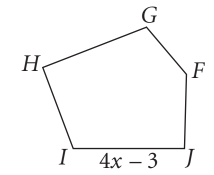



**12.** Como los dos pentágonos son congruentes, $ED = JI = 4x - 3$. Las marcas en los pentágonos muestran que $BC = ED$. Por lo tanto, $BC = ED = 4x - 3$. El perímetro de $ABCDE = (x + 2) + (4x - 3) + 7 + (4x - 3) + 2x = 36$ cm. Al resolver la $x$, obtienes $x = 3$ cm. Sustituye la $x$ con el 3 y usa el hecho de que los lados correspondientes son congruentes para hallar las longitudes de estos lados.

**a.** $AB = 5$ cm **b.** $HI = 7$ cm

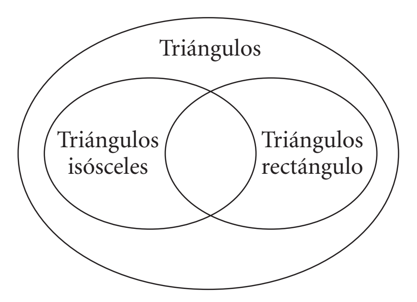
**c.** $FJ = 6$ cm




**13.** $x = 4$; $y = 4$; $z = 6$

**14.** Aunque es posible que un triángulo sea isósceles y rectángulo, también es posible que sea uno sin ser lo otro, entonces están representados por dos círculos que se superponen.






# El razonamiento en la geometría

## Resumen del contenido

Uno de los principales propósitos de cualquier curso de geometría es el de mejorar la capacidad de razonamiento lógico de los estudiantes. El Capítulo 2 se concentra en dos tipos básicos de razonamiento: inductivo y deductivo. Los estudiantes utilizan el *razonamiento inductivo* para identificar patrones visuales y numéricos y hacer predicciones basadas en estos patrones. Luego se les presenta el uso del *razonamiento deductivo* para explicar por qué estos patrones son ciertos. Los estudiantes exploran las relaciones entre las medidas de los ángulos formados por rectas transversales y paralelas, formulan conjeturas sobre estas relaciones y aprenden a utilizar argumentos lógicos para explicar por qué estas conjeturas son ciertas.

### Razonamiento inductivo

Cada vez que congela su botella de agua, el agua se expande. Usted aprende rápidamente a no poner demasiada agua en la botella para evitar que salte la tapa o se rompa la botella. El razonamiento por el cual se llega a conclusiones a partir de la experiencia es inductivo.

Los matemáticos utilizan el razonamiento inductivo para tratar de predecir qué puede ser cierto. Por ejemplo, si suma los números impares positivos comenzando desde el 1, obtiene un patrón.

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 = 9$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16$

Las sumas parecen ser cuadrados perfectos: $4 = 2 \cdot 2, 9 = 3 \cdot 3, 16 = 4 \cdot 4$. Incluso si usted "suma" sólo el primer número impar, 1, la suma es un cuadrado: $1 \cdot 1$. Usted puede concluir que la suma de cualquier cantidad de números impares positivos consecutivos, comenzando desde el 1, es un cuadrado perfecto.

Pero el razonamiento inductivo no es infalible. Puede pasar que alguna vez que usted ponga su botella de agua en el congelador, el agua no se expanda. (Quizás el congelador no funciona, o el agua está saborizada de alguna manera.) Por ende, los matemáticos no están satisfechos con el razonamiento inductivo. El razonamiento inductivo sólo lleva a predicciones, o *conjeturas.* Una conjetura se convierte en hecho matemático, o teorema, sólo si alguien demuestra que es la conclusión de un razonamiento deductivo.

### Razonamiento deductivo

El razonamiento deductivo, también llamado *demostración o prueba,* es el razonar a partir de hechos demostrados, utilizando pasos lógicamente válidos para llegar a una conclusión. Una demostración puede servir varios propósitos. Los matemáticos a menudo utilizan la demostración para verificar que una conjetura es verdadera para todos los casos, no sólo para aquellos examinados, o para convencer a otros. Las demostraciones a menudo ayudan a responder a la pregunta: *¿Por qué?* El uso de la demostración para explicar el por qué, es una extensión natural para los estudiantes en este punto del curso y les ayuda a profundizar su comprensión. Este capítulo resalta este propósito iluminador de la demostración o prueba.

Si usted tomó un curso de geometría, puede haberse encontrado con pruebas escritas en dos columnas: una columna con afirmaciones y una columna con justificaciones, donde cada afirmación está justificada con una razón. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes se sienten abrumados por este enfoque. Lo encuentran difícil de seguir y pierden la idea general. En *Discovering Geometry,* las pruebas en dos columnas aparecen en el Capítulo 13 con el estudio de la geometría como un

**(continúa)**

sistema matemático, punto en el cual los estudiantes se encuentran en el nivel de desarrollo adecuado. Por ahora, se anima a los estudiantes a usar argumentos deductivos informales escritos en forma de párrafos. En el Capítulo 4, se les mostrarán otras formas de presentar las pruebas.

### Estrategias de razonamiento

La parte más difícil del proceso de redactar un argumento deductivo es determinar la lógica subyacente del argumento y qué información incluir. Comenzando en el Capítulo 2 y continuando a lo largo de todo el libro, se enseñan estrategias de razonamiento a los estudiantes, formas de pensar que ayudan a construir un argumento deductivo. Quizá quiera hablar sobre estas formas de pensar con su estudiante. En este capítulo se presentan las primeras tres de estas estrategias de razonamiento y se presenta una estrategia más en cada capítulo subsiguiente como se indica.

- Dibuja un diagrama rotulado y marca lo que sabes.
- Representa una situación algebraicamente.
- Aplica conjeturas y definiciones previas.
- Divide un problema en partes. (Capítulo 3)
- Agrega una recta auxiliar. (Capítulo 4)
- Piensa de atrás para adelante. (Capítulo 5)

## Problema resumen

Dibuja dos rectas transversales. ¿Qué notas acerca de los ángulos opuestos por el vértice? ¿Puedes explicar cualquier patrón que veas?

Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Qué significa el término *ángulos opuestos por el vértice?*
- ¿Qué pares de ángulos son ángulos opuestos por el vértice?
- ¿Qué conjetura puedes expresar acerca de las medidas de los ángulos opuestos por el vértice?
- La conjetura que haces, ¿aplica a todos los pares de rectas transversales que has probado, o puedes hallar un contraejemplo?
- ¿Piensas que tu conjetura es válida para todos los pares de rectas transversales?
- ¿Cómo demostrarías que es verdadera para todos los pares?

## Ejemplos de respuestas

Cuando dos rectas se intersecan, forman cuatro ángulos diferentes. Dos ángulos no adyacentes formados por las rectas transversales son ángulos opuestos por el vértice. Dos rectas transversales forman dos pares de ángulos opuestos por el vértice. Los ángulos de cada par tienen medidas iguales. Explicar el por qué puede implicar hablar acerca de las líneas rectas y los diferentes pares de ángulos adyacentes, o de la rotación alrededor del vértice. Puede redactar un argumento deductivo para probar que la conjetura de ángulos opuestos por el vértice sigue lógicamente a la conjetura de pares lineales, tal como se ve en la página 124.

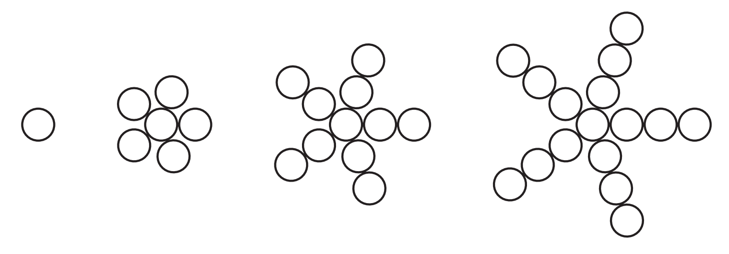
# Capítulo 2 • Ejercicios de repaso

**Nombre** ______________________ **Período** __________ **Fecha** __________

**1.** *(Lección 2.1)* Usa la regla dada para generar los próximos cinco términos de la secuencia.

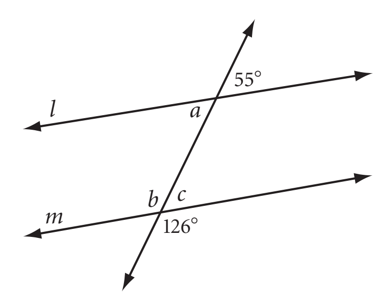
$2, 5, 9, 14, \ldots, \dfrac{n(n+3)}{2}, \ldots$

**2.** *(Lecciones 2.2, 2.3, 2.4)* Halla la regla para el número de círculos en la figura número $n$ y úsala para hallar el número de círculos en la figura número 20. ¿Estás usando razonamiento inductivo o deductivo para contestar esta pregunta?

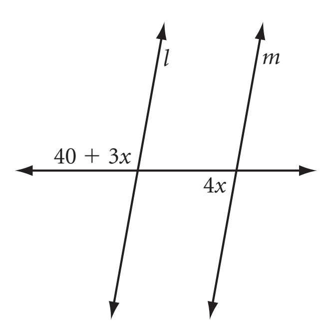


| **Número de figura** | 1 | 2 | 3 | 4 | . . . | $n$ | . . . | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de círculos** | 1 | 6 | 11 | 16 | . . . | | . . . | |

**3.** *(Lecciones 2.5, 2.6)* Halla la medida de cada ángulo con letra. ¿La recta $l$ es paralela a la $m$? Explica tu razonamiento.




**4.** *(Lección 2.6)* Las rectas $l$ y $m$ son paralelas entre sí. Halla $x$.



# SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

**1.** 20, 27, 35, 44, 54

Los primeros cuatro términos provienen de sustituir a $n$ por 1, 2, 3 y 4 en la regla dada. Sustituye $n$ por 5, 6, 7, 8 y 9 para hallar los siguientes cinco términos. Ver al final de la página.

**2.** $5n - 4$ (ó $5(n - 1) + 1$, que es equivalente); 96; razonamiento inductivo

Primero busca la diferencia entre los términos. En este caso sumamos cinco a cada término para llegar al término siguiente.

| **Número de figura** | 1 | 2 | 3 | 4 | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| **Número de circulos** | 1 | 6 | 11 | 16 | ... |

+5 +5 +5

Como la diferencia entre los términos consecutivos es siempre cinco, la regla es $5n$ + "algo". Supongamos que $c$ sea el "algo" desconocido, entonces la regla es $5n + c$. Para hallar $c$, reemplaza la $n$ en la regla por un número del término. Por ejemplo intenta $n = 3$ y que la expresión sea igual a 11, el número de círculos en la tercera figura.

$$5(3) + c = 11$$
$$15 + c = 11$$
$$c = -4$$

Por lo tanto la regla es $5n - 4$. Para averiguar cuántos círculos hay en la figura número 20, sustituye $n$ por 20 en la regla.

$$5(20) - 4 = 96$$

**3.** $a = 55°$ según la conjetura de los ángulos opuestos por el vértice.

$b = 126°$ según la conjetura de los ángulos opuestos por el vértice.

$c = 54°$ según la conjetura del par linear.

Si las rectas $l$ y $m$ fueran paralelas, entonces $c$ sería igual a 55° según la conjetura de los ángulos correspondientes. Sin embargo, $c = 54°$ como se indicó anteriormente, entonces $l$ y $m$ no son paralelas.

**4.**

| | |
|---|---|
| $40 + 3x + 4x = 180$ | Conjetura de los ángulos correspondientes y conjetura del par linear. |
| $40 + 7x = 180$ | Combina términos similares. |
| $7x = 140$ | Resta 40 de ambos lados. |
| $x = 20$ | Divide ambos lados entre 7. |

**1.**

| *n* | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{n(n+3)}{2}$ | $\frac{5(5+3)}{2} = 20$ | $\frac{6(6+3)}{2} = 27$ | $\frac{7(7+3)}{2} = 35$ | $\frac{8(8+3)}{2} = 44$ | $\frac{9(9+3)}{2} = 54$ |



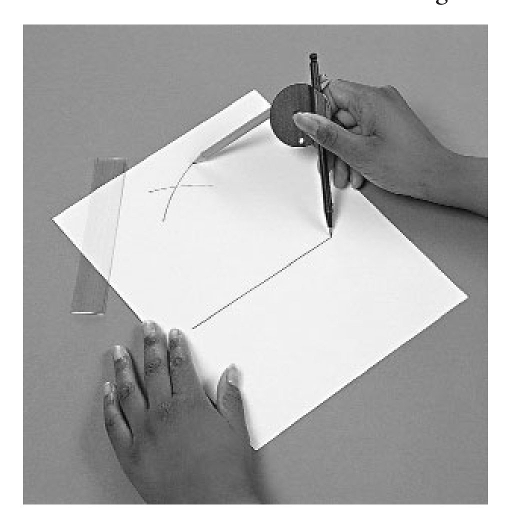
CAPÍTULO

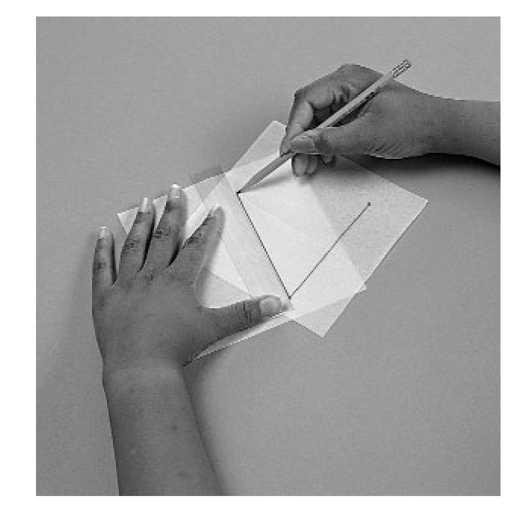
# 3 Uso de herramientas de geometría

A estas alturas del curso usted podría pensar en cómo está interactuando con su estudiante. Por ejemplo, ¿está usted siendo un estudiante para su estudiante? ¿Está formulando preguntas y dejando que su estudiante explique? ¿Está explicando lo suficientemente poco, como para que su estudiante se vuelva un aprendiz y pensador independiente? ¿Responde a preguntas que su estudiante no le ha preguntado? Decirle demasiado al estudiante puede ser una pérdida de tiempo, porque puede no entender; esto puede llevarle a sentirse abrumado. Se *puede* lograr una comprensión a fondo cuando usted deja que su estudiante le explique el concepto o habilidad a usted y a otros.

## Resumen del contenido

En el Capítulo 3, los estudiantes usan construcciones hechas por sus propias manos para desarrollar un sentido intuitivo de las propiedades de las formas. Esto permite un modo distinto de comprender cómo las partes de una figura están relacionadas con el todo. Los estudiantes aprenden a duplicar segmentos y ángulos, luego trabajan con rectas perpendiculares y paralelas, bisectrices de ángulos y segmentos, y rectas concurrentes. Un concepto subyacente es la determinación: ¿Qué propiedades determinan la forma de una figura? O sea, ¿qué propiedades son necesarias, para que estas propiedades definan una y sólo una forma? La idea de determinación es abordada a través de *construcciones geométricas.*





### Construcciones geométricas

Los estudiantes aprenden a duplicar segmentos y ángulos, a bisecar segmentos y ángulos, y a construir rectas perpendiculares y paralelas. Además de aprender las clásicas construcciones con compás y regla no graduada, los estudiantes aprenden a utilizar *patty paper,* pequeños cuadrados de papel encerado generalmente utilizados para separar las hamburguesas, como una herramienta singular para construcciones geométricas. Usted puede pensar en las construcciones geométricas como un juego: Intente dibujar una figura, tal como un cuadrado, utilizando solamente un compás y una regla no graduada y sin mediciones. Las soluciones pueden aplicarse a problemas de la vida real, tal como trazar los cimientos para un edificio, pero la tecnología moderna ofrece métodos más simples. Trate de ayudar a que su estudiante disfrute del juego. Por más de 2500 años, este juego les ha dado a los estudiantes comprensión práctica de las propiedades que determinan la forma de una figura. Una comprensión de la determinación será especialmente útil en el estudio de la congruencia de triángulos en el Capítulo 4.

**(continúa)**

## Problema resumen

Dibuja tres segmentos de recta en una hoja de papel utilizando sólo las herramientas de construcción (regla no graduada sin marcas y compás), y duplícalos para construir un triángulo, si es posible. Si tienes éxito, construye varios triángulos. Luego construye lo que sepas construir sobre los lados y ángulos del triángulo. ¿Qué patrones ves? ¿Qué conjeturas puedes hacer? ¿Puedes justificar por qué esas conjeturas pueden ser ciertas?

Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Es realmente posible construir un triángulo con copias de estos segmentos de recta sin tomar ninguna medida?
- ¿Alguna vez es imposible construir un triángulo a partir de tres segmentos dados?
- ¿Qué sucede cuando construyes varios triángulos utilizando los mismos tres segmentos? ¿Tres segmentos determinan un triángulo?
- ¿Qué sucede si construyes la mediatriz de cada lado del triángulo?
- ¿Qué sucede si construyes la bisectriz de cada ángulo del triángulo?
- ¿Qué sucede si marcas el punto medio de cada lado del triángulo y unes cada punto medio con otros puntos?
- ¿Qué más puedes construir sobre este triángulo, y qué otros patrones ves?

## Ejemplos de respuestas para el problema resumen del Capítulo 3

Siempre y cuando la suma de cualquier par de rectas sea mayor que la tercera, se puede construir un triángulo. El construir varios triángulos a partir de los mismos tres segmentos siempre conduce al mismo triángulo (aunque puede ser un reflejo exacto). Entonces, siempre y cuando se pueda construir un triángulo, éste está determinado. Una vez que se tienen tres segmentos que se pueden duplicar para formar un triángulo, su estudiante puede usar las copias del triángulo mientras explora. La mediatriz de cada lado puede construirse sobre una copia del triángulo y las bisectrices de los ángulos sobre otra. Los estudiantes hallarán puntos de concurrencia, en los cuales se intersecan tres rectas. También hallarán una relación entre las dos partes de un segmento determinado por el punto de concurrencia de las medianas, y relaciones entre algunos de estos puntos de concurrencia si realizan la exploración de la recta de Euler al final del capítulo. Su estudiante puede explorar otras relaciones.

# Capítulo 3 • Ejercicios de repaso

**Nombre** ______________________________ **Período** __________ **Fecha** ____________

**1.** *(Lecciones 3.1, 3.2)* Duplica $\overline{AB}$ y halla su mediatriz.

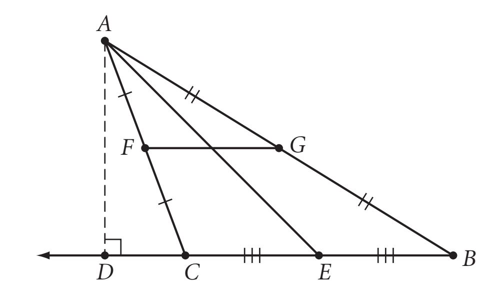
A ———————— B

**2.** *(Lecciones 3.2, 3.3)* Identifica las partes de $\triangle ABC$:

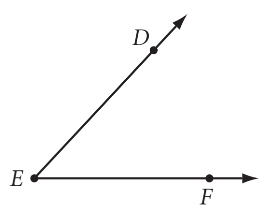
**a.** Mediana: ______

**b.** Altitud: ______

**c.** Segmento medio: ______



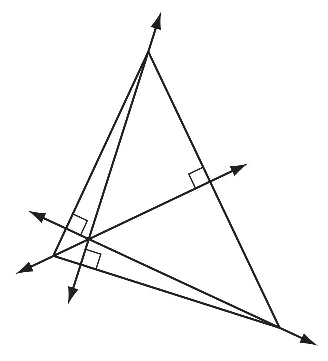

**3.** *(Lecciones 3.1, 3.4)* Duplica $\angle DEF$ y construye la bisectriz del ángulo.



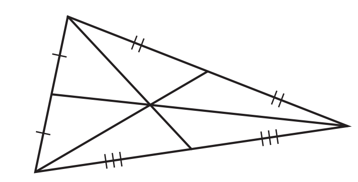

**4.** *(Lecciones 3.5, 3.6)* Construye un trapecio isósceles.

**5.** *(Lección 3.7)* Nombra cada centro.

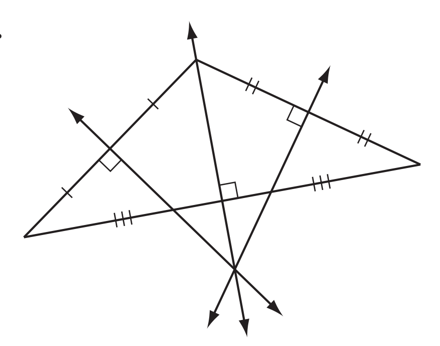
**a.**



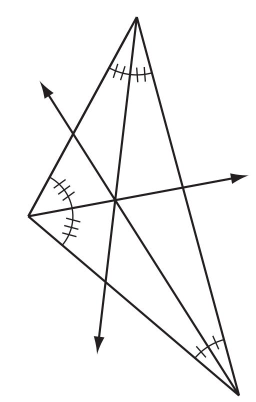
**b.**



**c.**

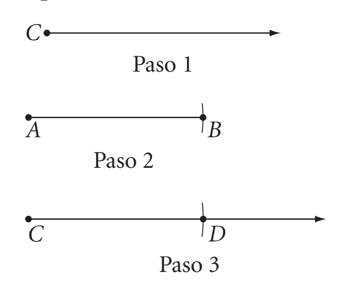


**d.**

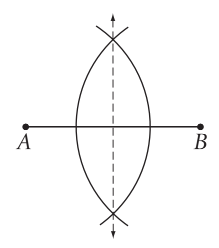


# SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

**1.** Duplicación:




Mediatriz

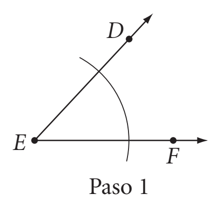



**2.** Mediana = $\overline{AE}$ porque conecta el vértice con el punto medio.

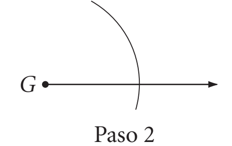
Altitud = $\overline{AD}$ porque es el segmento perpendicular desde un vértice a la recta que contiene el lado opuesto.

Segmento medio = $\overline{FG}$ porque conecta los puntos medios de dos lados.

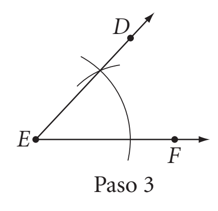
**3.** Duplicación:



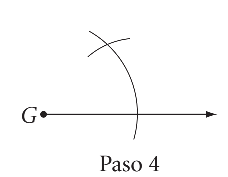

Paso 1



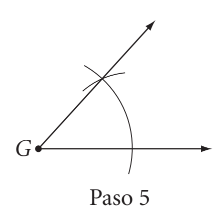

Paso 2




Paso 3

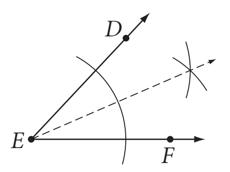



Paso 4

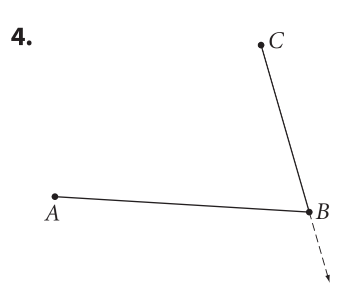


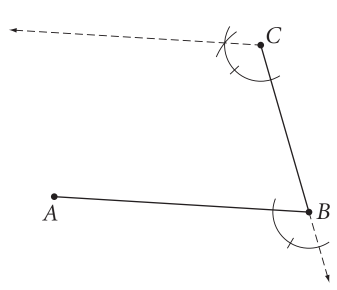

Paso 5

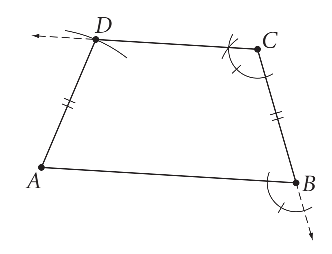
Bisectriz de ángulo:




**4.**




**5.** **a.** Ortocentro (intersección de altitudes)
**b.** Centroides (intersección de medianas)
**c.** Circuncentro (intersección de mediatrices)
**d.** Incentro (intersección de bisectrices de ángulos)




# Descubrimiento y prueba de las propiedades de los triángulos

## Resumen del contenido

En el Capítulo 4, los estudiantes exploran las propiedades de los triángulos y las condiciones que garantizan que dos triángulos sean congruentes. Al principio los estudiantes hacen conjeturas sobre la suma de los ángulos internos y externos, las propiedades de los triángulos isósceles y las relaciones de desigualdad entre los lados y los ángulos de los triángulos. Luego exploran las características necesarias para determinar la congruencia de dos triángulos, y finalmente, aprenden a usar esto para demostrar sus conjeturas.

### Relaciones de los ángulos en los triángulos

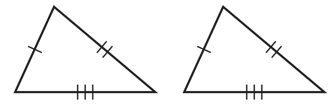
Los estudiantes experimentan, buscan patrones y hacen conjeturas sobre las partes de los triángulos. Estas conjeturas clave resultan de sus investigaciones:

- La suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180°.
- Dos ángulos de un triángulo son congruentes si y sólo si dos lados del triángulo son congruentes.
- La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los dos ángulos internos que no son adyacentes a este ángulo externo.

### Congruencia de triángulos

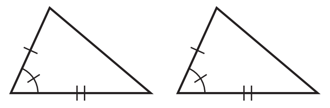
La idea de congruencia sirve como puente entre las propiedades de un triángulo en particular y las propiedades compartidas por dos o más triángulos. En cierto sentido, la congruencia se trata de determinación. Conocer los tres ángulos y los tres lados ciertamente determina un triángulo. En otras palabras, si usted dibuja un segundo triángulo con todos los lados y ángulos congruentes con aquellos en el primer triángulo, el segundo triángulo será congruente con el primero. Esencialmente será el mismo triángulo. Entonces, conocer tres ángulos y tres lados garantiza el tamaño y la forma del triángulo, y todos los triángulos que comparten ese conjunto de medidas tienen garantizada la congruencia entre sí. Pero, ¿un triangulo es determinado por menos de seis piezas de información? Por ejemplo, ¿es suficiente conocer tres ángulos para determinar un triángulo? ¿Es suficiente conocer dos lados y un ángulo? De la misma manera, ¿cómo puede decir si dos triángulos son congruentes? ¿Son congruentes si sus tres ángulos tienen las mismas medidas? O, ¿si dos lados y un ángulo son iguales? Este libro denomina a estas conjeturas *medios rápidos de congruencia.* Estos medios rápidos que son suficientes para garantizar la congruencia están listados a la derecha.

Lado-Lado-Lado (SSS)



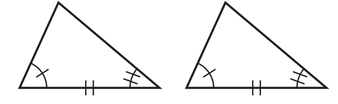
Tres pares de lados congruentes

Lado-Ángulo-Lado (SAS)



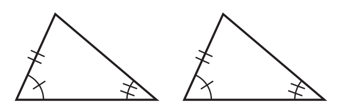
Dos pares de lados congruentes y un par de ángulos congruentes (ángulos entre los pares de lados)

Ángulo-Lado-Ángulo (ASA)



Dos pares de ángulos congruentes y un par de lados congruentes (lados que están entre los pares de ángulos)

Lado-Ángulo-Ángulo (SAA)



Dos pares de ángulos congruentes y un par de lados congruentes (lados que no están entre los pares de ángulos)

(continúa)

### Prueba

Una razón importante para desarrollar medios rápidos de congruencia para triángulos es demostrar otras propiedades de las figuras geométricas. El Capítulo 4 expone dos formatos para presentar las pruebas que se utilizarán en lo que queda del curso. La *prueba de párrafo,* expuesta al principio del capítulo, es un argumento deductivo que utiliza oraciones escritas para respaldar sus afirmaciones con razones. La *prueba de organigrama,* expuesta cerca del final del capítulo, ubica afirmaciones en casilleros conectados por flechas para mostrar el flujo de la lógica, presentando las razones lógicas debajo de cada casillero. En las últimas tres lecciones del capítulo, los estudiantes aplican medios rápidos de congruencia de triángulos usando estos formatos de prueba para demostrar las propiedades de los triángulos que descubrieron a lo largo del capítulo.

## Problema resumen

Suponga que conoce la longitud de la altitud desde la base de un triángulo isósceles y la medida de un ángulo entre la base y otro de los lados. ¿Esta información es suficiente para determinar un triángulo o existen diferentes triángulos posibles?

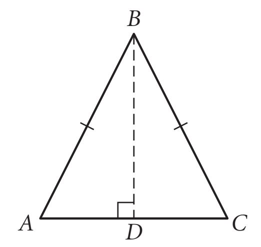
Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Te ayuda el dibujar altitudes y ángulos particulares, y tratar de formar más de un triángulo con las propiedades dadas?
- ¿Crees que es posible hacer más de un triángulo? ¿Por qué?
- ¿Puedes usar la conjetura de la suma angular en triángulos para ayudar a explicar por qué?
- ¿Puedes usar la conjetura del triángulo isósceles para ayudar a explicar por qué?
- ¿Puedes usar medios rápidos de congruencia para ayudar a explicar por qué?
- ¿Puedes usar la conjetura de la bisectriz del ángulo del vértice para ayudar a explicar por qué?
- ¿Qué sucede si el triángulo no es isósceles?

## Ejemplos de respuestas

Hacer y rotular un diagrama es una buena técnica para ayudar a pensar acerca de un problema. En este caso, el dibujar le mostrará que sólo hay un triángulo posible con una altitud de la longitud específica que usted dibujó y con el ángulo que dibujó entre la base del triángulo y otro de sus lados. Para explicar por qué, su estudiante utilizará varias conjeturas. Aquí se presenta una explicación, pero pídale a su estudiante que le dé otras explicaciones.

Como conoce uno de los ángulos de la base, también conoce el otro por la conjetura del triángulo isósceles. La altitud del triángulo isósceles lo divide en dos triángulos rectángulos ya que la altitud se define como perpendicular a la base. Ambos triángulos rectángulos tienen dos ángulos y un lado (en realidad, dos si consideramos la altitud compartida) iguales. Según la conjetura de congruencia SAA, tales triángulos son congruentes. Por ende, si construye un nuevo triángulo isósceles con la misma altitud y ángulo de la base dados, estará compuesto de dos de los mismos triángulos rectángulos congruentes, entonces está determinado.




Otras explicaciones podrían utilizar la conjetura de la bisectriz del ángulo del vértice junto con cualquiera de los medios rápidos de congruencia para ayudar a explicar por qué las dos mitades del triángulo isósceles son congruentes.

Note que estos argumentos fallan cuando se aplican a un triángulo que no es isósceles. El segundo “ángulo de la base” del triángulo no necesariamente es congruente con el primero. Para ver esto, pídale a su estudiante que dibuje algunos triángulos no congruentes que tengan una altitud dada y un ángulo dado entre la base y uno de los lados. En el diagrama de la derecha, si se le da $\angle A$, $\overline{AB}$, y la altitud $\overline{AD}$, puede colocar el punto $C$ en cualquier lugar a lo largo de $\overleftrightarrow{AD}$ si el triángulo no es isósceles.

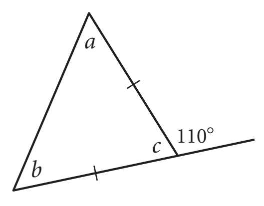
 

# Capítulo 4 • Ejercicios de repaso

**Nombre** ________________________ **Período** __________ **Fecha** ____________

*(Lecciones 4.1, 4.2)* Para los Ejercicios 1 y 2, halla las medidas faltantes.

**1.** Calcula la medida de cada ángulo con letra y explica cómo la hallaste.

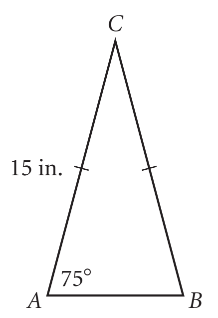



**2.** El perímetro de $\triangle ABC$ es de 36 pulg.

$BC = \underline{\ ?\ }$

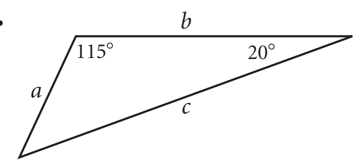
$AB = \underline{\ ?\ }$

$m\angle C = \underline{\ ?\ }$

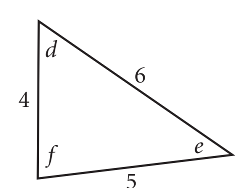



*(Lección 4.3)* Para los Ejercicios 3 y 4, ordena las tres medidas desconocidas en orden de mayor a menor.

**3.**

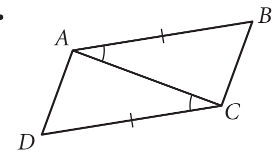



**4.**

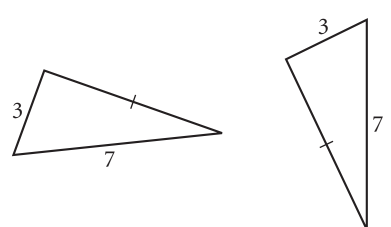



*(Lecciones 4.4, 4.5)* Para los Ejercicios 5 y 6, decide si los triángulos son congruentes. Si lo son, nombra el medio rápido de congruencia que usaste.

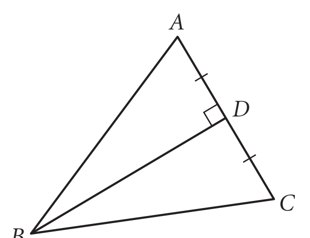
**5.**



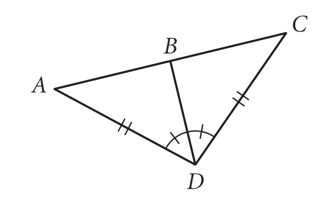

**6.**




**7.** *(Lecciones 4.6, 4.7)* Crea una prueba de organigrama para demostrar que $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.




**8.** *(Lección 4.8)* Escribe una prueba de párrafo para mostrar que $\overline{AB} \cong \overline{CB}$.



# SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

**1.**

| | |
|---|---|
| $c = 70°$ | Suplemento de 110°. |
| $a = b$ | Conjetura del triángulo isósceles. |
| $a + b + 70° = 180°$ | Conjetura de la suma angular en triángulos. |
| $a + a + 70° = 180°$ | Sustitución. |
| $2a + 70° = 180°$ | Combina términos similares. |
| $2a = 110°$ | Resta. |
| $a = 55°$ | División. |
| $b = 55°$ | Sustitución. |

**2.**

| | |
|---|---|
| $BC = 15$ pulg | Definición de un triángulo isósceles. |
| $AB + 15 + 15 = 36$ | Perímetro. |
| $30 + AB = 36$ | Suma. |
| $AB = 6$ pulg | Resta. |
| $m\angle B = 75°$ | Conjetura del triángulo isósceles. |
| $75° + 75° + m\angle C = 180°$ | Conjetura de las suma angular en triángulos. |
| $150° + m\angle C = 180°$ | Suma. |
| $m\angle C = 30°$ | Resta. |

**3.** $c > b > a$ $c$ es opuesto al ángulo más grande y $a$ es opuesto al ángulo más pequeño.

**4.** $f > d > e$ $f$ es opuesto al ángulo más grande y $e$ es opuesto al ángulo más pequeño.

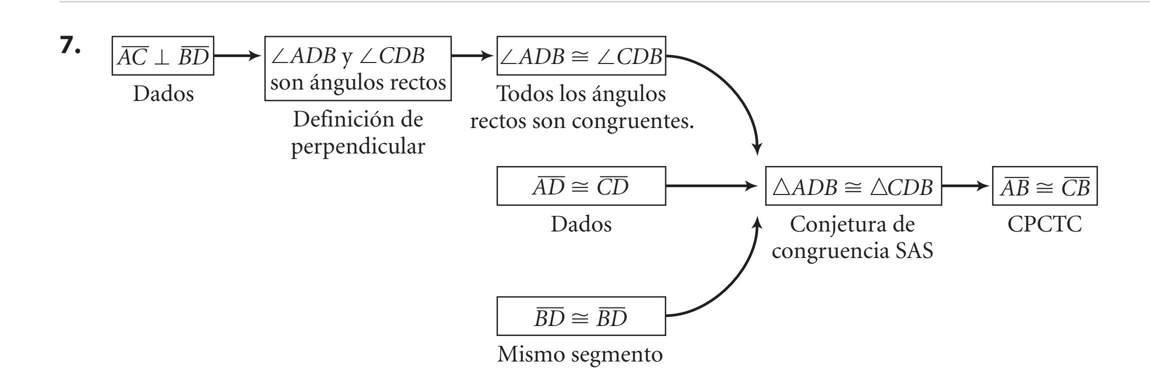
**5.** Sí, $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ según SAS.

**6.** Sí, los triángulos son congruentes según SSS.

**7.** Ver al final de la página.

**8.** Se nos da que $\overline{AD} \cong \overline{CD}$ y $\angle ADB \cong \angle CDB$. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ porque es el mismo segmento, entonces $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ según SAS. Por lo tanto, $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ según CPCTC (las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes).

**7.**






# Descubrimiento y prueba de las propiedades de los polígonos

## Resumen del contenido

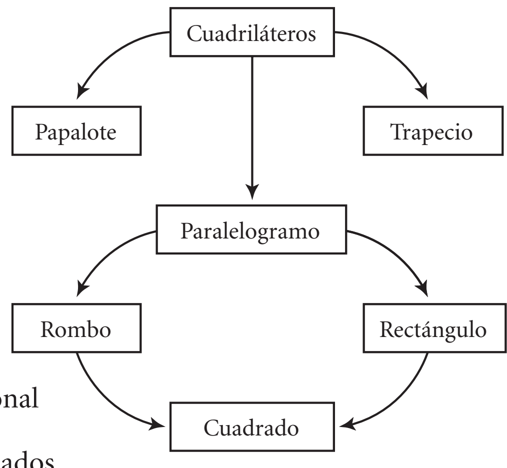
El Capítulo 5 extiende las exploraciones de las propiedades de los triángulos del capítulo anterior para examinar propiedades compartidas por todos los polígonos. Los estudiantes comienzan investigando las sumas de los ángulos internos y externos de cualquier polígono. El capítulo luego se concentra en los cuadriláteros, que son polígonos de cuatro lados. Los estudiantes exploran las relaciones entre los lados, ángulos y diagonales de distintos cuadriláteros especiales, incluyendo la familia de los paralelogramos.

### Polígonos

El capítulo comienza con conjeturas sobre los polígonos en general. Los estudiantes experimentan para formar conjeturas acerca de la suma de los ángulos de cualquier polígono y la suma de los ángulos externos de cualquier polígono. Escriben una prueba de párrafo para la primera conjetura, contando con la conjetura de la suma angular en triángulos del Capítulo 4.

### Cuadriláteros

El libro toma en cuanta las propiedades de tres categorías de cuadriláteros, como se ve en el diagrama: papalotes, trapecios y paralelogramos.




Los estudiantes exploran dos tipos de paralelogramos, rombos y rectángulos, así como los cuadrados, que son a la vez rombos y rectángulos. Los estudiantes descubren las propiedades de todos los tipos de cuadriláteros, incluyendo cómo se relacionan sus diagonales. En el caso de los trapecios, los estudiantes investigan los segmentos medios, a los cuales relacionan con los segmentos medios de los triángulos.

Las propiedades de varios cuadriláteros pueden verse a partir de su simetría. Un papalote tiene simetría de reflexión a través de la diagonal entre sus ángulos del vértice; un trapecio isósceles tiene simetría de reflexión a través de la recta que pasa por los puntos medios de los lados paralelos; y un paralelogramo tiene simetría de rotación de orden 2 con respecto al punto en el cual se intersecan sus diagonales. Estas simetrías pueden ayudar a explicar por qué ciertos pares de segmentos o ángulos son congruentes o perpendiculares.

## Problema resumen

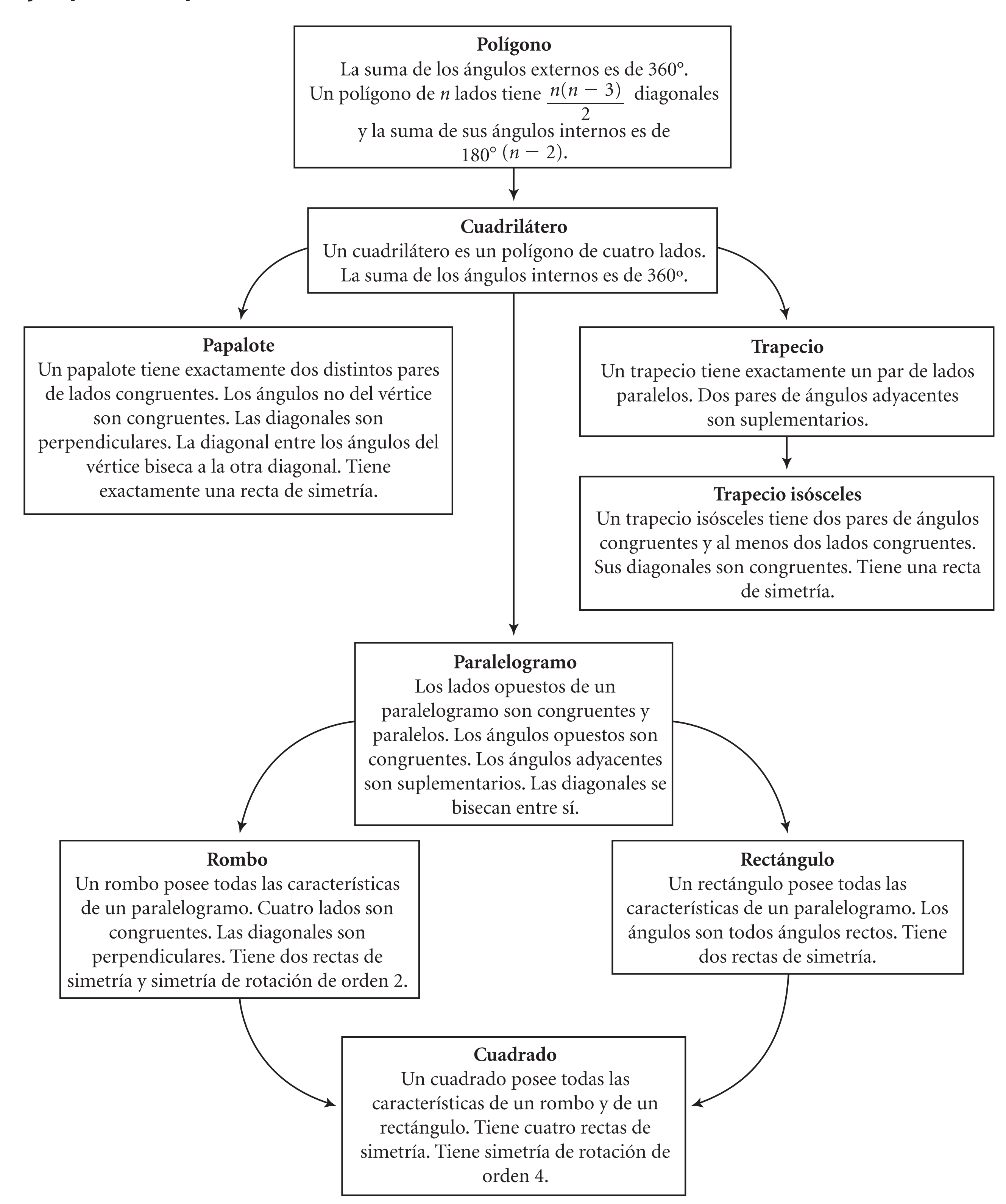
Haga una copia del diagrama que se encuentra aquí arriba, pero con casilleros grandes. Escriba en cada casillero las propiedades de ese tipo de figuras a medida que las encuentra en el libro.

Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- Si agregas un casillero arriba del diagrama para polígonos en general, ¿qué propiedades puedes poner dentro de ese casillero?
- ¿Qué otro tipo de polígonos podrían ir en un diagrama expandido?
- ¿Dónde se podrían agregar los trapecios isósceles en tu diagrama?
- ¿Dónde se podrían agregar los dardos en tu diagrama?
- ¿Qué propiedades se te ocurren que aún no estén en tu diagrama?
- ¿Notas algún tipo de patrón sobre las propiedades que comparten los diferentes tipos de polígonos?

**(continúa)**

## Ejemplos de respuestas




Dibujar los casilleros en la forma del polígono cuyas propiedades contienen puede hacer que el diagrama sea más interesante.

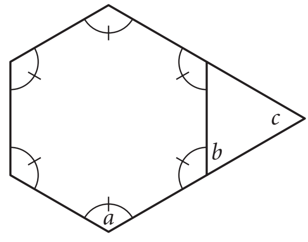
# Capítulo 5 • Ejercicios de repaso

**Nombre** ______________________________ **Período** __________ **Fecha** ____________

1. *(Lecciones 5.1, 5.2)* Halla la suma de las medidas de los ángulos internos de un 14-ágono regular. Luego halla la suma de los ángulos externos.

*(Lecciones 5.1, 5.2, 5.4)* Para los Ejercicios 2 y 3, halla las medidas marcadas con una letra en cada figura.

2. 

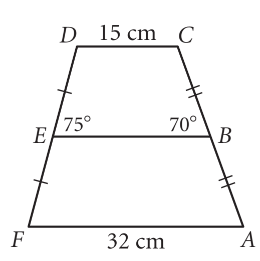



3. Dado que $\overline{CD} \parallel \overline{AF}$,

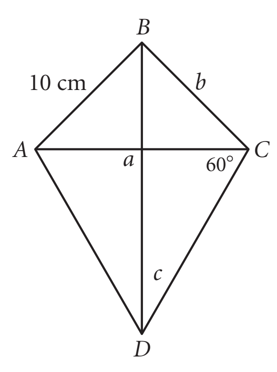
   $BE = \underline{\ ?\ }$.

   $m\angle ABE = \underline{\ ?\ }$.

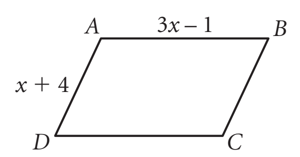
   $m\angle CDF = \underline{\ ?\ }$.




4. *(Lección 5.3)* Dado el papalote *ABCD*, halla las medidas faltantes.




5. *(Lección 5.5)* El perímetro del paralelogramo *ABCD* es de 46 pulg. Halla las longitudes de sus lados.




6. *(Lecciones 5.6, 5.7)* Dibuja un diagrama y escribe una prueba de párrafo para mostrar que las diagonales de un rectángulo son congruentes.

# SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

**1.** Ángulos internos:

Suma de los ángulos internos $= 180\,(n - 2)$
$= 180\,(14 - 2) = 2160°$

Ángulos externos $= 360°$ para todos los polígonos

**2.** Para el hexágono:

La suma de los ángulos internos $= 180\,(n - 2)$
$= 180\,(6 - 2) = 720°$

Cada ángulo $= \frac{720°}{6} = 120°$

$a = 120°$

$b = 60°$ Par linear.

$c = 60°$ Suma del triángulo.

**3.** $BE = \dfrac{15 + 32}{2} = 23.5$ cm Segmento medio.

$m\angle ABE = 110°$ Par linear.

$m\angle CDF = 105°$ Ángulos suplementarios.

**4.** $a = 90°$ Las diagonales de un papalote son perpendiculares.

$b = 10$ cm Definición de papalote.

$c = 30°$ Suma del triángulo.

**5.** $2(3x - 1) + 2(x + 4) = 46$ Los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes.

$6x - 2 + 2x + 8 = 46$ Propiedad distributiva.

$8x + 6 = 46$ Combina términos similares.

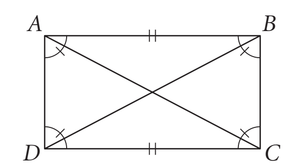
$8x = 40$ Resta.

$x = 5$ División.

$AB = 3(5) - 1 = 14$ pulg Sustitución.

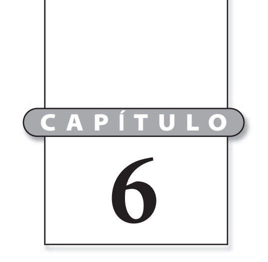
$AD = 5 + 4 = 9$ pulg Sustitución.

**6.** Ejemplo de respuesta:




Por definición, todos los ángulos de un rectángulo son congruentes, entonces $\angle ABC \cong \angle DCB$. Un rectángulo, como cualquier paralelogramo, tiene lados opuestos congruentes, entonces $\overline{AB} \cong \overline{DC}$. Como es el mismo segmento, $\overline{BC} \cong \overline{BC}$. Entonces $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ según SAS, y $\overline{AC} \cong \overline{DB}$ según CPCTC. Por lo tanto, las diagonales de un rectángulo son congruentes.

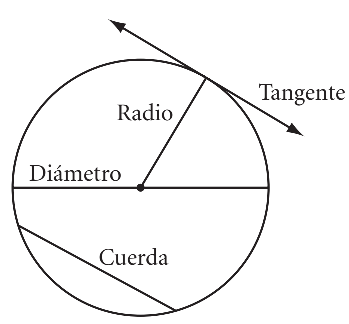



# Descubrimiento y prueba de las propiedades de los círculos

## Resumen del contenido

En el Capítulo 6, los estudiantes continúan ampliando su comprensión de la geometría a medida que exploran las propiedades de los círculos. Algunas de estas propiedades están asociadas a segmentos de recta relacionados con círculos; otras propiedades están asociadas a arcos y ángulos. Un círculo se define como un conjunto de puntos equidistantes de un punto fijo, su *centro*.

### Segmentos de recta relacionados con círculos




Los segmentos de recta más conocidos relacionados con un círculo son su radio y su diámetro. De hecho, la palabra *radio* puede referirse tanto al segmento de recta entre un punto sobre el círculo y su centro, como a la longitud de dicho segmento. Igualmente, *diámetro* se refiere a un segmento de recta que tiene sus extremos sobre el círculo y que pasa por el centro, o a la longitud de dicho segmento.

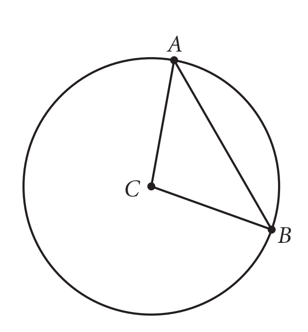
El diámetro es un caso especial, porque es la *cuerda* más larga de un círculo; una cuerda es un segmento de recta cuyos extremos están sobre el círculo. Otro segmento de recta asociado con los círculos es un segmento *tangente*, que toca al círculo en un solo punto y está sobre la *recta tangente,* que también toca al círculo en un solo punto y es perpendicular al radio en este punto. Los estudiantes aprendieron acerca de estos segmentos en el Capítulo 1, y la Lección 6.1 brinda un repaso rápido.

### Arcos y ángulos

Una parte del círculo en sí mismo es un *arco*. Si une cada extremo del arco con el centro del círculo, forma el *ángulo central* que corta el arco. La medida de un arco puede expresarse en grados —la cantidad de grados del ángulo central del arco. Este capítulo explora varias relaciones de este tipo entre arcos, ángulos y segmentos. Los estudiantes también escribirán pruebas de párrafo y de organigrama para confirmar la universalidad de dichas relaciones.

La medida de un arco también puede expresarse como longitud. La longitud de un arco se calcula utilizando la circunferencia total, o distancia alrededor del círculo. El número $\pi$ se define como la circunferencia de cualquier círculo dividido entre el diámetro de dicho círculo; o, la circunferencia es $\pi$ veces el diámetro. Por ejemplo, si un arco es $\frac{1}{4}$ del círculo completo, entonces su ángulo central mide $\frac{1}{4}$ de 360°, y su longitud es de $\frac{1}{4}$ de la circunferencia del círculo.

## Problema resumen




Dibuje un diagrama del ángulo central que corte una cuerda de un círculo y su arco, como se ve en la ilustración.

Desplace los puntos *A*, *B* y *C* a distintas ubicaciones para ilustrar las ideas del capítulo.

Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Qué conceptos se ilustran en el dibujo original?
- ¿Cómo podrías desplazar cada uno de los puntos *A*, *B* y *C* para mostrar un ángulo inscrito?
- ¿Cómo podrías desplazar cada uno de los puntos *A*, *B* y *C* para mostrar segmentos tangentes?

**(continúa)**

- ¿Cómo podrías desplazar cada uno de los puntos *A*, *B* y *C* para mostrar un ángulo inscrito en un semicírculo?
- ¿Cómo podrías desplazar cada uno de los puntos *A*, *B* y *C* para mostrar rectas paralelas que corten arcos congruentes?

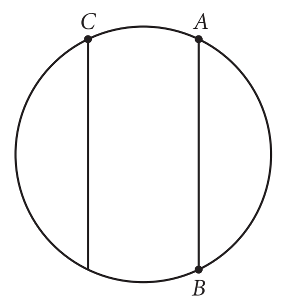
## Ejemplos de respuestas

El dibujo original muestra un ángulo central, un sector, una cuerda y un arco. Si el centro, *C*, se desplaza para que esté sobre el círculo, se forma un ángulo inscrito.

Si *C* se desplaza al exterior del círculo, y *A* y *B* se desplazan de modo que $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ sean tangentes, entonces esos segmentos son congruentes. O, la cuerda del diagrama original podría rotarse sobre uno de sus extremos hasta formar un segmento tangente.

Si *C* se desplaza de modo que $\overline{AC}$ sea el diámetro y *B* permanezca sobre el círculo, $\angle ABC$ es un ángulo recto inscrito en un círculo.

Debería agregar otro punto y colocar a *C* sobre el círculo para mostrar dos cuerdas. Las cuerdas paralelas cortan arcos iguales si son equidistantes al centro.



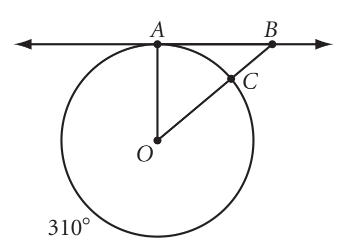

Por supuesto que hay muchas otras respuestas posibles. Pídale a su estudiante a que piense en varias formas en que *A*, *B* y *C* pueden desplazarse para ilustrar los mismos conceptos.

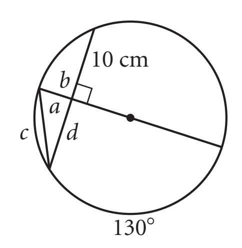
# Capítulo 6 • Ejercicios de repaso

**Nombre** ______________________ **Período** __________ **Fecha** ____________

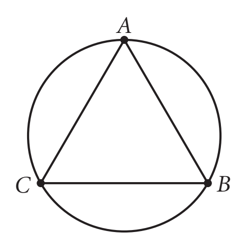
**1.** *(Lección 6.1)* Dada la tangente $\overleftrightarrow{AB}$, halla $m\angle OAB$, $m\angle AOB$, y $m\angle ABO$.




**2.** *(Lecciones 6.2, 6.3)* Halla las longitudes o medidas desconocidas.



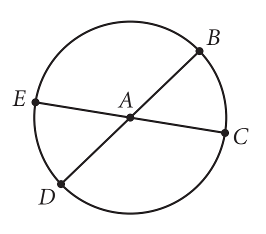

**3.** *(Lección 6.3)* $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero: Halla $m\overset{\frown}{AB}$.



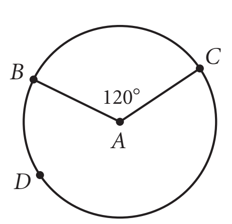

**4.** *(Lección 6.4)* Escribe una prueba de párrafo para probar lo siguiente:

**Dado:** Círculo $A$ con los diámetros $\overline{EC}$ y $\overline{BD}$.

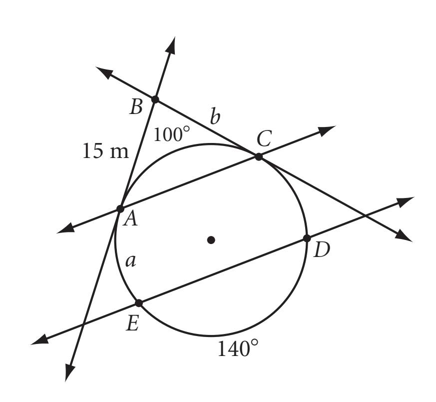
**Demuestra:** $\overset{\frown}{ED} \cong \overset{\frown}{BC}$




**5.** *(Lecciones 6.5, 6.7)* Dado que la circunferencia del círculo $A$ es $24\pi$ pulg, halla el radio del círculo y la longitud de $\overset{\frown}{BDC}$.




**6.** *(Lecciones 6.1, 6.3)* $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ son tangentes al círculo mostrado. $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{ED}$. Halla $a$ y $b$.



# SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

**1.**

| | |
|---|---|
| $m\angle AOB = 90°$ | La tangente es perpendicular al radio. |
| $m\overset{\frown}{AC} = 360° - 310° = 50°$ | 360° en un círculo. |
| $m\angle AOC = m\overset{\frown}{AC} = 50°$ | El ángulo central es igual a la medida del arco. |
| $50° + 90° + m\angle ABO = 180°$ | Suma angular en triángulos. |
| $m\angle ABO = 40°$ | Resta. |

**2.**

| | |
|---|---|
| $b = 90°$ | El diámetro es perpendicular a la cuerda. |
| $d = 10$ cm | El diámetro perpendicular a la cuerda biseca la cuerda. |
| $c = 180° - 130° = 50°$ | 180° en un semicírculo. |
| $a = \frac{1}{2}(130°)$ | Ángulos inscritos. |
| $m\angle a = 65°$ | División. |

**3.**

| | |
|---|---|
| $AB = BC = AC$ | Triángulo equilátero. |
| $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{AC}$ | Los arcos congruentes de las cuerdas congruentes. |
| $m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{AC} = 360°$ | 360° en un círculo. |
| $m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{AB} = 360°$ | Sustitución. |
| $3m\overset{\frown}{AB} = 360°$ | Combina los términos semejantes. |
| $m\overset{\frown}{AB} = 120°$ | División. |

**4.** Los diámetros $\overline{CE}$ y $\overline{BD}$ en el círculo $A$ intersecan para formar águlos congruentes opuestos por el vértice, entonces $m\angle BAC = m\angle DAE$. La medida de un arco es igual a la medida de su ángulo central. Por lo tanto, $m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{ED}$ porque las medidas de sus ángulos centrales son iguales.

**5.** $C = 2\pi r = 24\pi$ pulg; por lo tanto, $r = 12$ pulg.

$m\overset{\frown}{BDC} = 360° - 120° = 240°$

La longitud de $\overset{\frown}{BDC} = \frac{240}{360}(24\pi) = 16\pi$ pulg.

**6.**

| | |
|---|---|
| $m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{AE} = a$ | Las secantes paralelas cortan los arcos congruentes. |
| $100° + a + a + 140° = 360°$ | 360° en un círculo. |
| $a = 60°$ | Resolver. |
| $b = 15\ m$ | Los segmentos tangentes del mismo punto son congruentes. |




# Transformaciones y teselaciones

## Resumen del contenido

Pensar en ideas desde diferentes perspectivas puede llevar a una comprensión más profunda. Por ejemplo, las transformaciones geométricas pueden ayudar a los estudiantes a profundizar su comprensión de congruencia y simetría.

Puede pensar en una transformación geométrica como un cambio regular a una figura en el plano. Por ejemplo, una figura puede deslizarse 5 hacia la derecha. O, una figura puede agrandarse al doble de su tamaño original.

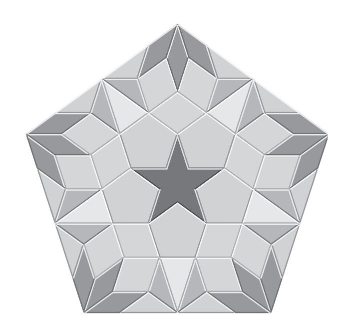
El Capítulo 7 se concentra en transformaciones que no cambian el tamaño ni la forma de las figuras. Estas transformaciones se denominan *isometrías*. Las expansiones y contracciones denominadas *dilataciones*, se estudian en el Capítulo 11.

### Isometrías

Hay tres tipos principales de isometrías: traslaciones, reflexiones y rotaciones.

Las *traslaciones* son simplemente deslizamientos. Los estudiantes utilizan traslaciones cuando hablan sobre teselaciones, donde una única figura es trasladada (deslizada) repetidamente en distintas direcciones para cubrir el plano sin espacios vacíos ni superposiciones.

Las *reflexiones* voltean una forma a través de una recta para formar una imagen especular. Si existe una recta a través de la cual una forma puede reflejarse para estar exactamente sobre la original, entonces la figura tiene *simetría de reflexión*, como los estudiantes vieron en el Capítulo 0. Las reflexiones pueden usarse para diseñar figuras capaces de cubrir el plano con una teselación. También pueden utilizarse para ayudar a hallar el camino más corto desde un objeto a una recta y de allí a otro objeto.



Este patrón de baldosas tiene simetría de rotación de orden 5 y simetría de reflexión de orden 5.

Las *rotaciones* rotan un objeto alrededor de un punto. Si existe un punto alrededor del cual una forma puede rotarse en algún ángulo (menor de 360°) para llegar exactamente a la misma forma, entonces la figura tiene *simetría de rotación* (también presentada en el Capítulo 0). Las rotaciones también pueden usarse en el diseño de teselaciones.

Las isometrías le dan al estudiante una nueva forma de pensar acerca de las congruencias. Dos figuras son congruentes si una puede ser transformada en la otra usando una isometría.

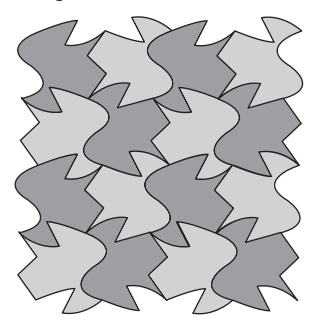
### Composición de isometrías

Una transformación seguida de otra es una *composición* de dichas transformaciones. Este capítulo toma en consideración las composiciones de dos reflexiones: las reflexiones a lo largo de rectas paralelas (resultando en una traslación) y las reflexiones a lo largo de rectas no paralelas (resultando en una rotación). En el contexto de las teselaciones, este capítulo también examina las reflexiones de deslizamiento, que son composiciones de una traslación y una reflexión.

**(continúa)**

## Problema resumen

Haga que su estudiante calque esta teselación en papel de calcar o papel encerado. Pregúntele cómo ilustra los conceptos en consideración.



Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Qué isometrías podrían utilizarse para convertir una parte de la figura en otra?
- ¿Cuál es la cuadrícula subyacente de esta teselación?
- ¿Podría hacerse esta teselación sólo con traslaciones?
- ¿Qué tipos de simetría tiene la figura completa?

## Ejemplos de respuestas

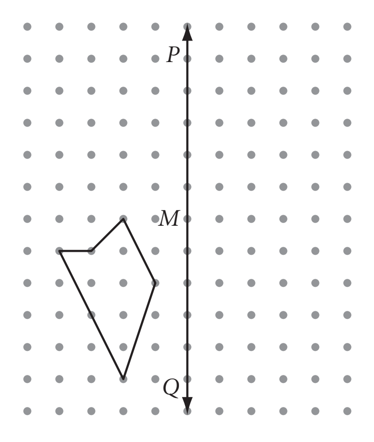
La teselación, basada en una cuadrícula de cuadriláteros de cuatro por cuatro, ilustra muchas transformaciones. Cada una de las figuras oscuras puede ser trasladada para cubrir una figura oscura que esté a dos filas o columnas de distancia. O, puede ser rotada 180° para cubrir una figura clara de la misma fila. Para cubrir una figura clara de una fila adyacente, la figura oscura debe ser reflejada verticalmente, luego trasladada. (Las tres transformaciones descritas también son ciertas para cada una de las figuras claras.) Cualquier bloque de cuatro figuras que se tocan en un punto puede ser trasladado para cubrir todo el plano.

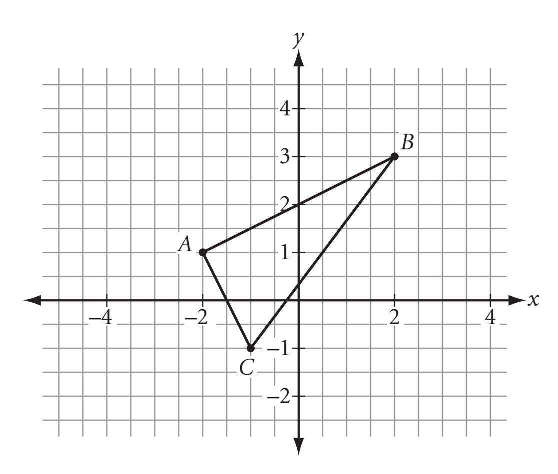
# Capítulo 7 • Ejercicios de repaso

**Nombre** ________________________ **Período** __________ **Fecha** ____________

1. (Lección 7.1) Refleja la figura a través de $\overleftrightarrow{PQ}$ y rótala 180° alrededor del punto $M$. ¿Tu respuesta cambia si primero la rotaras y luego la reflejaras?




2. *(Lección 7.2)* Traslada $\triangle ABC$ usando la regla $(x, y) \rightarrow (x - 3, y + 1)$.

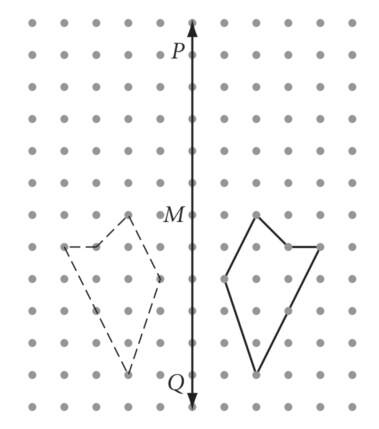



3. *(Lección 7.3)* Nombra la rotación simple que puede reemplazar la composición de estas dos rotaciones alrededor el mismo centro de rotación: 36° y 120°.

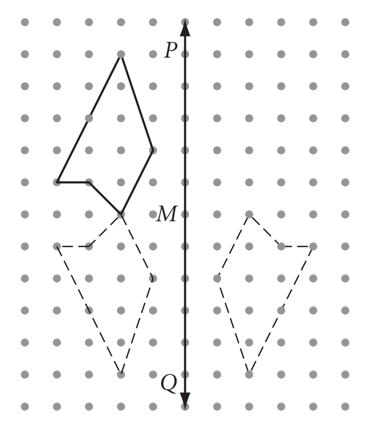
4. *(Lección 7.1)* ¿Qué letra mayúscula tienen simetría horizontal pero no vertical?

5. *(Lección 7.1)* ¿Qué letras mayúsculas tienen simetría horizontal, vertical y de rotación?

**1.** Reflexión:

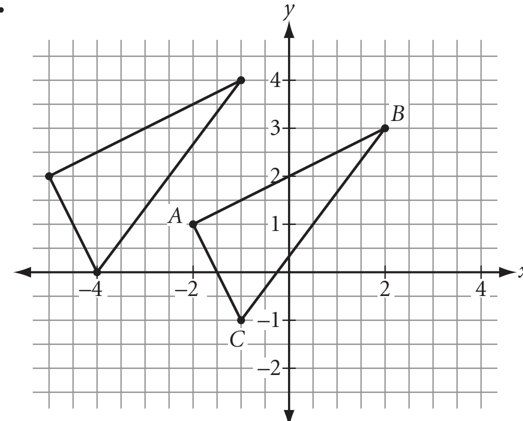



Rotación:




No, la respuesta final es la misma.

**2.**




**3.** $36° + 120° = 156°$

**4.** B, C, D, E, K

**5.** H, I, O, X




# Área

## Resumen del contenido

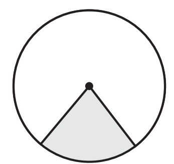
Su estudiante puede ya haber visto fórmulas para las áreas de figuras geométricas estándares. Si es así, pregúntele el significado de esas fórmulas. Algunas preguntas apropiadas podrían ser, "¿Qué significa área?" y "¿Esta fórmula es aún válida si la figura es rotada hasta tener una base distinta?". Concéntrese en el hecho de que el área se mide por el número de unidades cuadradas que llenarían una región.

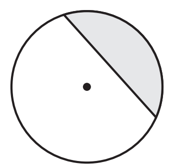
### Áreas de polígonos

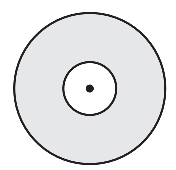
Algunos estudiantes no poseen un concepto importante con respecto al área: Cuando una figura se recorta y sus partes se reacomodan, la figura resultante tiene la misma área que la original. Con este concepto, los estudiantes entienden por qué las fórmulas de área para paralelogramos, triángulos y trapecios pueden hallarse utilizando la fórmula del área de un rectángulo, y cómo las áreas de otras figuras planas pueden hallarse utilizando áreas de triángulos.

### Áreas de círculos y partes de círculos

Los matemáticos de antaño descubrieron que la relación entre la circunferencia y el diámetro es la misma para todo círculo, un numero que ahora llamamos $\pi$. Lo que no fue descubierto hasta más tarde es que el mismo número aparece en la fórmula del área de una región encerrada por un círculo. *Discovering Geometry* muestra formas de conectar las ideas de circunferencia y de área para que las fórmulas sean más comprensibles. Los estudiantes también aprenden a hallar las áreas de las partes de uno de los círculos a continuación relacionándolo estas formas con los círculos y los triángulos.

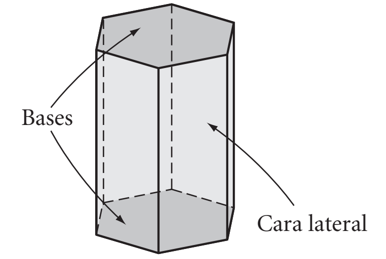

Sector de un círculo

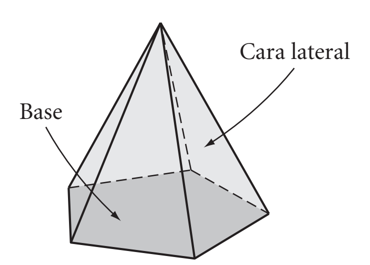

Segmento de un círculo


Corona circular

### Área superficial

El área superficial de un sólido se refiere al área de la superficie, que en realidad es de dos dimensiones. La superficie de un sólido a menudo está compuesta de formas estándares; para hallar la superficie, sus estudiantes hallarán la suma de las áreas de estas formas.

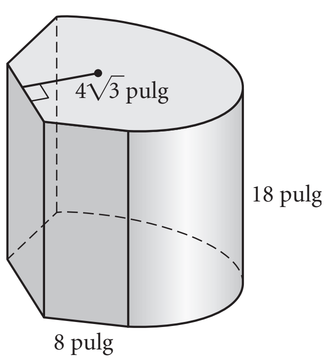



Algunos sólidos tienen una o dos bases cuyas áreas deben ser incluidas en la suma. También se incluyen las áreas de los lados (o caras laterales), que en este libro son principalmente rectángulos o triángulos. La cara lateral de un cilindro, cuando se aplana, es un rectángulo. La cara lateral de un cono, cuando se aplana, es un sector de un círculo. El área superficial de una esfera se toma en consideración en el Capítulo 10.

(continúa)

## Problema resumen



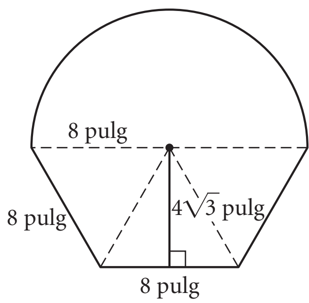

¿Cuál es el área superficial de esta escultura de piedra? Cada una de las bases paralelas comenzó como un círculo. La mitad de cada círculo se dejó intacta. La otra mitad se cortó tres veces, dejando tres lados de un hexágono regular.

Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Puedes hallar el área de partes de la figura?
- ¿Cómo se relaciona un hexágono regular con el círculo en el cual está inscrito?
- ¿Cómo se relaciona el radio del círculo con la longitud de uno de los lados rectos?
- Como desafío extra, piensa qué sucedería si se recortara más piedra de la escultura hasta que vaya gradualmente desde la base inferior hasta el punto del centro de lo que es actualmente la base superior. ¿Cuál sería el área superficial?

## Ejemplos de respuestas

Calcular el área superficial implica identificar todas las superficies, luego sistemáticamente calcular y sumar sus áreas. Pídale a su estudiante que sea sistemático y organizado. Cuando hagan los cálculos, los estudiantes deben revisar su trabajo. También ayuda el estimar la respuesta primero para asegurarse de que no se cometan grandes errores.




Cada base consiste de un semicírculo y la mitad de un hexágono regular. Como se muestra en el diagrama a la derecha, el medio hexágono se puede dividir en tres triángulos equiláteros congruentes, de modo que el radio del semicírculo es de 8 pulg. El área del semicírculo es de $\frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(8)^2 = 32\pi$ pulg². El área de cada triángulo equilátero es $\frac{1}{2}(8)\left(4\sqrt{3}\right) = 16\sqrt{3}$ pulg², entonces el área del medio hexágono es $48\sqrt{3}$ pulg². El área de cada base es entonces $48\sqrt{3} + 32\pi$ pulg².

Cada una de las caras laterales rectangulares tiene un área de $8 \cdot 18 = 144$ pulg². Si se recortara la cara lateral curva y se aplanara, formaría un rectángulo de 18 pulg de altura. El ancho de ese rectángulo será la mitad de la circunferencia del círculo, ó $\frac{1}{2} \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi(8) = 8\pi$ pulg. El área de esta cara lateral, entonces, es $18 \cdot 8\pi = 144\pi$ pulg².

Entonces las caras de la escultura tienen estas áreas en pulgadas cuadradas:

- 2 bases: $48\sqrt{3} + 32\pi$ pulg²
- 3 caras laterales rectangulares: 144 pulg²
- 1 cara lateral curva: $144\pi$ pulg²

El área superficial total es $2(48\sqrt{3} + 32\pi) + 3(144) + 144\pi = 96\sqrt{3} + 208\pi + 432$, o cerca de 1252 pulg².

Si la base superior de la escultura fuera tallada hasta un punto, la superficie curva se convertiría en medio cono y el resto en media pirámide hexagonal. Puede usar esta pregunta para motivar el estudio del Teorema de Pitágoras del Capítulo 9. Un estudiante que recuerde este teorema de un curso previo, puede calcular la altura oblicua del cono como $\sqrt{8^2 + 18^2} = \sqrt{388}$ y la altura oblicua de las caras laterales de la media pirámide es $\sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 18^2} = \sqrt{372}$. El área superficial de un cono es $\pi rl + \pi r^2 = \pi(8)\left(\sqrt{388}\right) + \pi(8)^2$. La mitad del cono tendría la mitad del área superficial o $4\pi\sqrt{388} + 32\pi$. Las caras laterales de la media pirámide tendrían un área de $\frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(8)\left(\sqrt{372}\right)$, ó $4\sqrt{372}$. La base de abajo seguiría teniendo un área de $48\sqrt{3} + 32\pi$. Entonces, el área total de la figura sería $4\pi\sqrt{388} + 32\pi + 3\left(4\sqrt{372}\right) + 48\sqrt{3} + 32\pi$, que es aproximadamente 763 pulg².

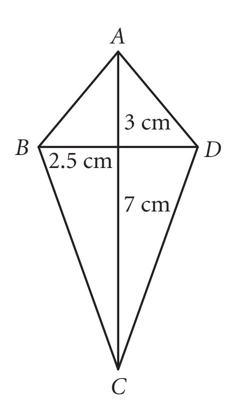
 

Nombre ______________________ Período __________ Fecha ____________

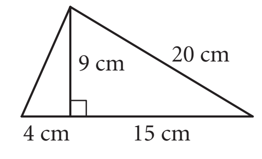
1. *(Lección 8.1)* Halla el área del cuadrilátero *ABCD* con los vértices (1, 2), (4, 2), (−1, −2), (2, −2).

2. *(Lecciones 8.2, 8.4)* Halla el área de cada figura.

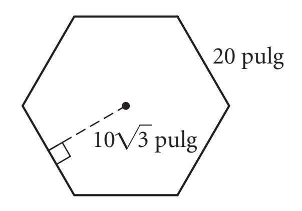
a. Papalote *ABCD*



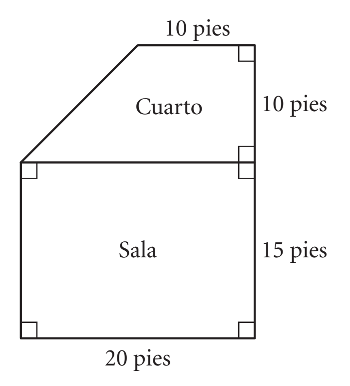

b. Triángulo



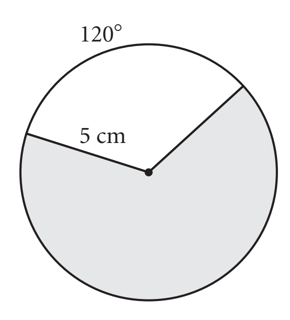

c. Hexágono regular



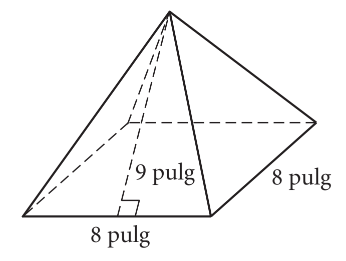

3. *(Lecciones 8.1, 8.2, 8.3)* Shahin quiere alfombrar los pisos en su sala y su cuarto. Si la alfombra, bajoalfombra e instalación cuestan \$30 por yarda cuadrada, ¿cuánto costará?




4. *(Lecciones 8.5, 8.6)* Halla el área de la región sombreada. Deja las respuestas en términos de $\pi$.



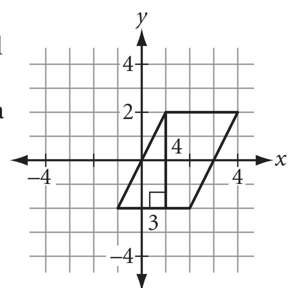

5. *(Lección 8.7)* Halla el área superficial de esta pirámide cuadrada.



# SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

**1.** Después de graficar los puntos, descubrimos que el cuadrilátero es un paralelogramo cuya base es igual a 3 unidades y altura igual a 4 unidades. Halla el área:




$A = bh$

$A = (3)(4)$

$A = 12$ unidades cuadradas

**2.** **a.** $A = \frac{1}{2}d_1d_2$

$A = \frac{1}{2}(10)(5) = 25 \text{ cm}^2$

**b.** $A = \frac{1}{2}bh$

$A = \frac{1}{2}(19)(9) = 85.5 \text{ cm}^2$

**c.** $A = \frac{1}{2}aP$

$P = 6 \cdot 20 = 120$ pulg

$A = \frac{1}{2}\left(10\sqrt{3}\right)(120) \approx 1039 \text{ pulg}^2$

**3.** Cuarto (trapecio): $A = \frac{1}{2}h\left(b_1 + b_2\right) = \frac{1}{2} \cdot 10(10 + 20) = 150 \text{ pies}^2$

Sala (rectángulo): $A = bh = (15)(20) = 300 \text{ pies}^2$

Área total $= 150 + 300 = 450 \text{ pies}^2$

Para hallar el área en yardas cuadradas:

$450 \text{ pies}^2 \left(\frac{1 \text{ yd}}{3 \text{ pies}}\right)^2 = 450 \text{ pies}^2 \cdot \frac{1 \text{ yd}^2}{9 \text{ pies}^2} = 50 \text{ yd}^2$

Costo total $= 50 \text{ yd}^2 \cdot \frac{\$30}{\text{yd}^2} = \$1500.00$

**4.** $r = 5$ cm

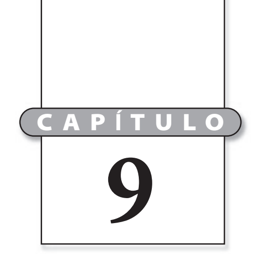
La medida del ángulo del sector $= 360° - 120° = 240°$

Área de un sector $= \frac{240}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{240}{360} \cdot \pi(5)^2 = \frac{50\pi}{3} \text{ cm}^2$

**5.** $A = 4\left(\frac{1}{2}bh\right) + b^2$

$A = 4\left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9\right) + 8^2 = 208 \text{ pulg}^2$




# El Teorema de Pitágoras

## Resumen del contenido

Uno de los teoremas más recordados de la geometría es el Teorema de Pitágoras. Este capítulo comienza revisando el Teorema de Pitágoras y luego tomando en consideración su recíproco. Luego examina los medios rápidos en el caso de triángulos especiales. Finalmente, el Teorema de Pitágoras se utiliza para calcular distancias en el plano de coordenadas, haciendo posible escribir una ecuación de un círculo.

### El Teorema de Pitágoras y su recíproco

Mucha gente identifica el Teorema de Pitágoras como $a^2 + b^2 = c^2$, sin recordar qué representan *a, b* y *c*. El teorema en realidad dice que si *a*, *b* y *c* son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es de longitud *c*, entonces $a^2 + b^2 = c^2$.

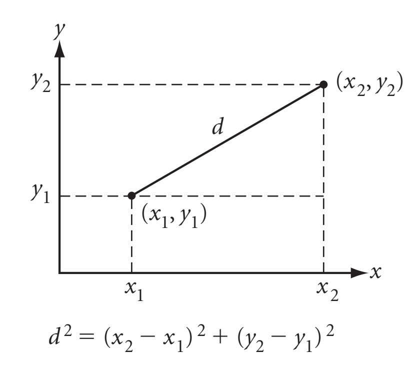
El recíproco del Teorema de Pitágoras también es verdadero: Si *a*, *b* y *c* son las longitudes de los lados de un triángulo, y si $a^2 + b^2 = c^2$, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud *c*.

### Aplicaciones a triángulos

*Discovering Geometry* ilustra cómo aplicar el Teorema de Pitágoras para resolver problemas del mundo real. También aplica el teorema para hallar los lados relativos de dos triángulos rectángulos especiales: el triángulo de 45°-45°-90°, que es la mitad de un cuadrado; y el triángulo de 30°-60°-90°, que es la mitad de un triángulo equilátero.

### Aplicaciones a círculos

De álgebra, los estudiantes saben cómo escribir ecuaciones para representar rectas y parábolas. Junto con las conjeturas del Capítulo 6, el Teorema de Pitágoras puede ser utilizado para desarrollar ecuaciones de círculos. La reformulación del Teorema de Pitágoras en geometría de coordenadas es la fórmula de distancia, que dice cómo encontrar la distancia entre dos puntos cuyas coordenadas se conocen. De esta fórmula, el libro deriva la ecuación de un círculo.




**(continúa)**

## Problema resumen

¿Por qué la ecuación general de un círculo es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$?

Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Qué números representan $h$, $k$ y $r$?
- ¿Qué puntos satisfacen la ecuación si $h$ y $k$ son ambos 0?
- ¿Qué puedes decir acerca de la distancia desde cualquier punto sobre un círculo hasta el centro?
- ¿Cómo se compara esta ecuación con la fórmula de la distancia?
- ¿Por qué la suma de los cuadrados de la izquierda es igual al cuadrado de la derecha?

## Ejemplos de respuestas

Sugiérale a su estudiante que relacione esta ecuación con la fórmula de la distancia que se muestra más arriba. Mirando el diagrama, imagine que el punto $(x_1, y_1)$ es el centro de un círculo, y que todos los puntos del círculo están a una distancia $d$ del mismo. Si vuelve a nombrar el centro $(h, k)$ y la distancia $r$, puede ver que el círculo son todos los puntos $(x, y)$ que están a dicha distancia de $(h, k)$.

Si el centro está en el punto (0, 0), todos los puntos que satisfacen la ecuación están a una distancia $r$ del origen —esto es, todos están en un círculo centrado en el origen de radio $r$.

La ecuación de ese círculo es $x^2 + y^2 = r^2$, que es el Teorema de Pitágoras. Intente hacer que su estudiante use un compás para dibujar un círculo centrado en el origen con cierto radio (por ejemplo, 5 ó 10), y luego pídale que identifique algunos puntos sobre ese círculo y los reemplace en la ecuación.

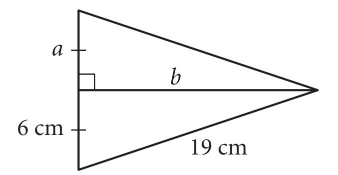
 

# Capítulo 9 • Ejercicios de repaso

**Nombre** ______________________ **Período** __________ **Fecha** ____________

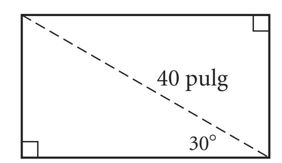
Redondea las soluciones al décimo de unidad más cercano.

**1.** *(Lección 9.1)* Halla cada longitud faltante.



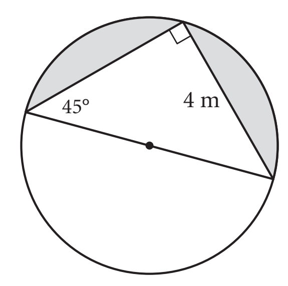

**2.** *(Lección 9.2)* Un triángulo cuyos lados miden 3 pies, 4 pies y 5 pies ¿es un triángulo rectángulo? Justifica tu respuesta.

**3.** *(Lecciones 9.3, 9.4)* Si un televisor de 40 pulg tiene una diagonal igual a 40 pulg, como se muestra aquí. Halla las dimensiones del televisor.




**4.** *(Lección 9.5)* Halla la ecuación del círculo con los extremos del diámetro (–2, 2) y (4, 2).

**5.** *(Lección 9.6)* Halla el área de la región sombreada.



# SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 9

**1.** $a = 6$ cm    Segmentos congruentes.

$6^2 + b^2 = 19^2$    Teorema de Pitágoras.

$36 + b^2 = 361$

$b^2 = 325$

$b \approx 18.0$ cm

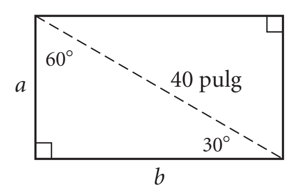
**2.** Si los lados con longitudes 3, 4 y 5 forman un triángulo rectángulo, el Teorema de Pitágoras debería ser una afirmación verdadera:

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$25 = 25$

Entonces, es un triángulo rectángulo.

**3.** Usa la conjetura de la suma angular de un triángulo para hallar el otro ángulo de un triángulo rectángulo. El triángulo es 30°-60°-90°, entonces puedes usar el medio rápido.




$a = \frac{1}{2}(40) = 20$ pulg

$b = a\sqrt{3} = 20\sqrt{3} \approx 34.6$ pulg

**4.** Si se usa el diámetro dado, el centro está en $(1, 2)$ y el radio es 3. Incorpora estos valores en la ecuación de círculo.

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

**5.** El triángulo es 45°-45°-90°, entonces el diámetro es $4\sqrt{2}$ m.

$r = \frac{1}{2}\left(4\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$ m

Área del semicírculo $= \frac{1}{2}$ area del círculo $= \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi(4 \cdot 2) = 4\pi$ m$^2$

Área del triángulo $= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(4)(4) = 8$ m$^2$

Área de la región sombreada = área del semicírculo − área del triángulo $= 4\pi - 8 \approx 4.6$ m$^2$

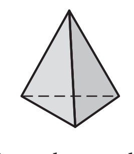
 

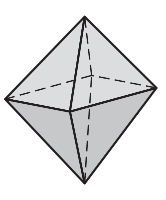


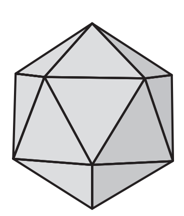

# Volumen

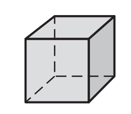
## Resumen del contenido

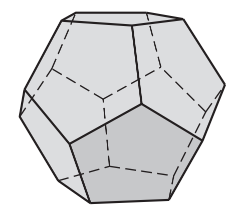
En geometría, la palabra *sólido* se refiere a la cáscara de una figura tridimensional, sin incluir su interior. Los sólidos pueden clasificarse de muchas formas en base a su forma. Los cinco sólidos *regulares* tienen caras que son polígonos regulares congruentes y ángulos que son todos congruentes.


Tetraedro regular (4 caras)


Octaedro regular (8 caras)


Icosaedro regular (20 caras)


Hexaedro regular (6 caras)

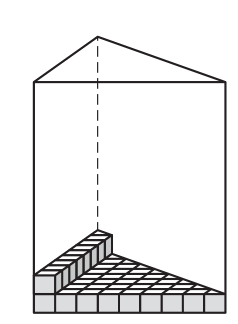

Dodecaedro regular (12 caras)

Así como el área se mide como el número de unidades cuadradas que llenan completamente una región, el volumen se mide como el número de unidades cúbicas que llenan completamente un espacio. Pueden ser pulgadas cúbicas (pulg$^3$), centímetros cúbicos (cm$^3$) u otras unidades de volumen.

Este capítulo contiene fórmulas del volumen de bastantes sólidos. Su estudiante debería ser capaz de reconocer estas fórmulas a través de la visualización y una buena comprensión del volumen, y utilizarlas para resolver problemas prácticos.

### Prismas y cilindros

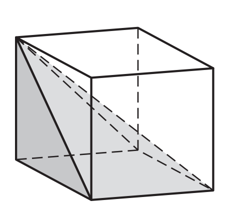
Muchos sólidos comunes, como cajas de cartón, tienen por lo menos un par de caras paralelas y, generalmente, congruentes. Si estas caras son polígonos y están conectadas por lados que son paralelogramos, el sólido se denomina *prisma*. Si las caras son círculos unidos por un solo lado, el sólido es un *cilindro*. En ambos casos, las caras paralelas se denominan *bases*.



Para ayudar a su estudiante a pensar sobre el volumen de un prisma o un cilindro, podría sugerirle que imagine el prisma sobre una mesa con una de las bases hacia abajo. Luego que cubra la base inferior con una capa de cubos. Algunos cubos deberán cortarse para caber dentro del sólido. De todos modos, cada uno de estos cubos brinda una unidad cuadrada sobre la base, entonces el número de estos cubos es el área de la base. Si coloca otra capa de cubos encima de la primera, y luego otra capa sobre ésta, y así sucesivamente, puede llenar el prisma. El volumen —el número de cubos en todo el espacio— es igual al número de cubos sobre la base multiplicado por el número de capas. O sea, el volumen es el área de la base multiplicada por la altura del sólido.

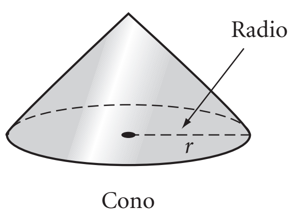
### Pirámides y conos

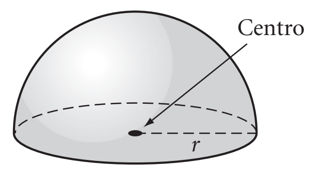
Suponga que tiene una pirámide o un cono. El sólido tiene una base y se va estrechando hacia un punto. Si la base es un polígono, el sólido puntiagudo es una *pirámide*. Si la base es un círculo el sólido puntiagudo es un *cono*. Si lo apoya sobre su base, cada capa será más pequeña que la capa inferior. Es interesante comparar el volumen de un sólido puntiagudo con el volumen de un prisma o cilindro con la misma base. De modo sorprendente, la relación entre sus volúmenes es siempre de 1 a 3. Entonces el volumen de un sólido puntiagudo es $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma o cilindro con la misma base y altura.



**(continúa)**

### Esferas

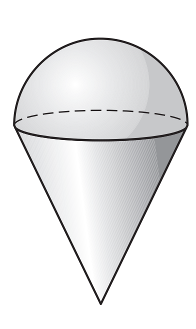



*Discovering Geometry* pide a los estudiantes que hallen el volumen de una esfera (en realidad un hemisferio) midiendo la cantidad de agua que contendría comparada con un cilindro del mismo radio y altura. Para ayudar a su estudiante a recordar esta fórmula, puede usar una comparación distinta: Pregúntele qué relación hay entre el volumen de un hemisferio y el volumen de un cono con la misma base y altura. Claramente, el hemisferio tiene mayor volumen. Resulta ser que el hemisferio tiene el doble de volumen. Si la esfera tiene radio $r$, entonces el área de la base (del cono y del hemisferio) es $\pi r^2$. La altura del hemisferio y el cono también es $r$, entonces el volumen del cono es $\frac{1}{3}(\pi r^2)(r)$, o $\frac{1}{3}\pi r^3$, de modo que el volumen del hemisferio es $\frac{2}{3}\pi r^3$. El volumen de la esfera es, entonces, el doble de esta cantidad, o sea $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Para ayudar a recordar la fórmula para el área superficial de una esfera, puede sugerir que su estudiante imagine un pedazo de papel recortado como un círculo que corresponda con la base del hemisferio. Este papel no será suficiente para cubrir todo el hemisferio. Interesantemente, sin embargo, cubriría exactamente la mitad del mismo. Entonces el área superficial de la esfera es 4 veces el área de dicho círculo. O sea, el área superficial es $4\pi r^2$.

## Problema resumen



Un helado en una heladería tiene forma de cono con un hemisferio en la parte superior. El cono tiene 22 cm de altura. El diámetro del hemisferio es de 13 cm. El helado viene envasado apretado en una caja con forma de prisma con bases cuadradas. ¿Cuáles son los volúmenes de la caja y del helado?

Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Cuáles son las dimensiones (longitud, ancho y altura) de la caja de envase?
- ¿Cuál es el volumen de la caja de envase?
- ¿Cuál sería el volumen de la caja de envase si fuera sustituida por un cilindro?
- ¿Cuál es el volumen del cono?
- ¿Cuál es el volumen del hemisferio?

## Ejemplos de respuestas

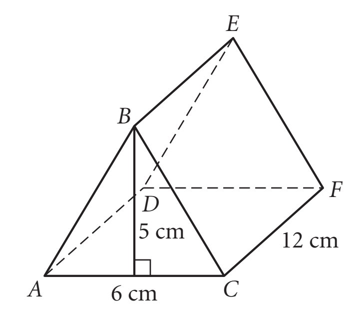
Supongamos que el helado está envasado perfectamente vertical. (Si el producto estuviera envasado inclinado para que la punta del cono encaje en una esquina, una caja levemente más pequeña podría ser posible). Las dimensiones de la base de la caja de envase deben ser iguales al diámetro del hemisferio, o 13 cm. El hemisferio tiene radio 6.5 cm, entonces la altura de la caja de envase es de 28.5 cm. Entonces el volumen de la caja de envase es $13 \cdot 13 \cdot 28.5$, ó 4816.5 $\text{cm}^3$. Si la caja de envase fuera en cambio un cilindro, las bases serían círculos de radio 6.5 cm, entonces sus áreas serían $\pi(6.5)^2$, y el volumen de la caja sería $\pi(6.5)^2(28.5)$, o sea aproximadamente 3783 $\text{cm}^3$.

El cono tiene un área de base de $\pi(6.5)^2$ y altura de 22, entonces su volumen es $\frac{1}{3}\pi(6.5)^2(22)$, o aproximadamente 973.4 $\text{cm}^3$. La hemisferio tiene volumen $\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi(6.5)^3\right]$, lo cual es aproximadamente 575.2 $\text{cm}^3$. Entonces el volumen del helado es aproximadamente 1549 $\text{cm}^3$.

# Capítulo 10 • Ejercicios de repaso

**Nombre** ________________________________________ **Período** ____________ **Fecha** ________________




**1.** *(Lecciones 10.1, 10.2)* Usa el prima triangular para contestar lo siguiente:

**a.** Nombra las bases del prisma.

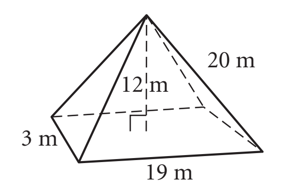
**b.** ¿Cuál es el área de una base?

**c.** ¿Cuál es la altura del prisma?

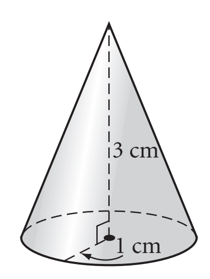
**d.** Halla el volumen.

**2.** *(Lecciones 10.2, 10.3)* Halla el volumen de cada sólido.

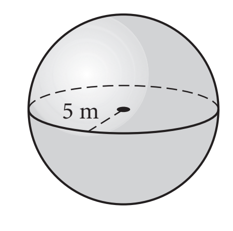
**a.** Pirámide rectangular



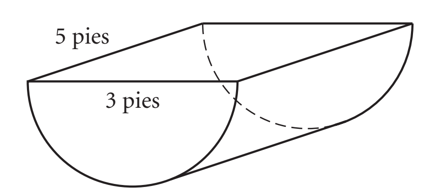

**b.** Cono

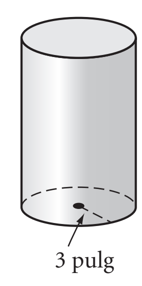



**c.** Esfera



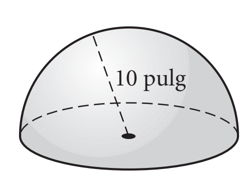

**3.** *(Lecciones 10.3, 10.4)* Un bebedero cilíndrico semicircular tiene un diámetro de 3 pies y una longitud de 5 pies. Si 1 pie cúbico de agua tiene aproximadamente 7.5 galones, ¿qué capacidad tiene el bebedero en galones?




**4.** *(Lección 10.5)* Arrojas una piedra dentro de un cilindro con un radio de 3 pulg, haciendo subir el nivel del agua 1 pulg. ¿Qué volumen tiene la piedra?

**5.** *(Lección 10.7)* Halla el volumen y área superficial de este hemisferio.



**1. a.** $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son las bases.

**b.** $A = \frac{1}{2}bh$

$A = \frac{1}{2}(6)(5) = 15 \text{ cm}^2$

**c.** $H = 12$ cm

**d.** $V = BH$ ($B$ = área de la base; $H$ = altura del prisma)

$V = (15)(12) = 180 \text{ cm}^3$

**2. a.** $V = \frac{1}{3}BH$

$B = (3)(19) = 57 \text{ m}^2$

$H = 12$ m

$V = \frac{1}{3}(57)(12) = 228 \text{ m}^3$

**b.** $V = \frac{1}{3}BH$

$V = \frac{1}{3}(\pi r^2)H$

$V = \frac{1}{3}\pi(1)^2(3) = \pi \approx 3.1 \text{ cm}^3$

**c.** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500\pi}{3} \approx 523.6 \text{ m}^3$

**3.** $r = \frac{1}{2}(3) = 1.5$ pies

$V = BH$, donde la base es un semicírculo y $H$ es la longitud del bebedero

$V = \left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)H$

$V = \frac{1}{2}\pi(1.5)^2(5) \approx 17.7 \text{ pies}^3$

$17.7 \text{ pies}^3 \cdot \frac{7.5 \text{ gal}}{1 \text{ pies}^3} \approx 133 \text{ gal}$

**4.** La nueva “rebanada” de agua tiene la forma de un cilindro con un radio de 3 y una altura de 1. El volumen de este cilindro es $= \pi r^2 H = \pi(3)^2(1) = 9\pi \approx 28.3 \text{ pulg}^3$.

**5.** El volumen del hemisferio $= \frac{1}{2}$ del volumen de la esfera

$V = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]$

$V = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}\pi(10)^3\right] \approx 2094.4 \text{ pulg}^3$

El área superficial del hemisferio $= \frac{1}{2}$ del área superficial de la esfera + área de la base

$SA = \frac{1}{2}(4\pi r^2) + \pi r^2$

$SA = \frac{1}{2}[4\pi(10)^2] + \pi(10)^2 = 300\pi \approx 942.5 \text{ pulg}^2$




# Semejanza

## Resumen del contenido

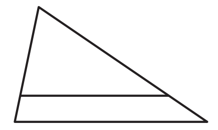
Uno de los tipos de pensamiento más importantes en las matemáticas es el razonamiento proporcional —aplicar lo que sabemos de una figura a figuras más grandes o más pequeñas. En el Capítulo 11 los estudiantes tienen la oportunidad de practicar este tipo de pensamiento aplicándolo a figuras semejantes —figuras que son agrandamientos (estiramientos) o reducciones (encogimientos) entre sí. Una transformación que estira o encoge a una figura por el mismo factor en todas direcciones es una *dilatación*, y el factor se denomina *factor de escala.*

### Polígonos semejantes

En el uso diario, "semejante" significa parecido en algunas maneras. Pero en geometría, *semejante* significa exactamente la misma forma (pero no necesariamente el mismo tamaño). Dos polígonos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes y las longitudes de los lados correspondientes tienen todas la misma razón. Esta razón se denomina el factor de escala. Las razones de las longitudes de otras partes correspondientes de triángulos semejantes son iguales al factor de escala. El libro se concentra en triángulos semejantes y —tal como con la congruencia— halla medios rápidos para determinar semejanza. Estos medios rápidos pueden aplicarse para calcular longitudes que no pueden medirse directamente, tal como la altura de un mástil de bandera.

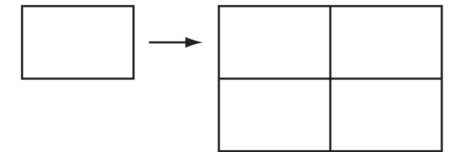
### Rectas paralelas

Si se dibujan rectas entre dos lados de un triángulo y son paralelas al tercer lado, entonces cada recta crea un nuevo triángulo semejante al original. Entonces, estas rectas dividen proporcionalmente los dos lados que cortan.



### Área y volumen

Algunos de los resultados más importantes y sorprendentes implican las relaciones entre las áreas o volúmenes de figuras semejantes. Suponga que duplica la longitud y el ancho de un rectángulo para formar un rectángulo más grande. Podría esperar que el área sea el doble, pero de hecho es el cuádruple, o aumenta con un factor 4.



Si cualquier figura bidimensional se dilatada con un factor de escala $r$, entonces su área se multiplica por $r^2$. Igualmente, si una figura tridimensional se dilatada con un factor de escala $r$, entonces su volumen se multiplica por $r^3$. (Las áreas superficiales de sus caras, que son bidimensionales, se multiplican por $r^2$.) Por ejemplo, si una esfera se agranda con un factor 1.5 (su radio se multiplica por 1.5), entonces su volumen se multiplica por $1.5^3 = 3.375$, y su área superficial se multiplica por $1.5^2 = 2.25$.

**(continúa)**

## Problema resumen

Dibuje un pentágono en papel cuadriculado, tal como en la Lección 11.1, Investigación 2. Elija cualquier constante como su factor de escala. Multiplique las coordenadas de cada vértice por esa constante para ubicar los vértices de un nuevo pentágono. ¿Cómo se comparan los dos pentágonos?

Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Son semejantes los pentágonos?
- ¿De cuántas formas puedes demostrar que son semejantes?
- ¿Cómo se compara el área del nuevo pentágono con el área del original?
- ¿Qué factores de escala utilizarías para agrandar el pentágono original? ¿Qué factores de escala utilizarías para hacer un pentágono más pequeño?

## Ejemplos de respuestas

Para verificar la semejanza, debemos demostrar que los lados correspondientes son proporcionales y que los ángulos correspondientes son congruentes. Su estudiante puede verificar que los lados son proporcionales ya sea midiendo las longitudes de los lados correspondientes y escribiendo sus razones o dibujando segmentos desde el origen a los vértices y aplicando la conjetura ampliada de paralelismo/proporcionalidad (hallando cinco pares de triángulos semejantes). Puede verificar la congruencia de los ángulos correspondientes midiéndolos o aplicando el medio rápido de semejanza SSS a triángulos en los que puede dividirse el pentágono. Una vez que se conoce el factor de escala, puede elevarse al cuadrado para determinar la razón entre las áreas. Los factores de escala mayores que 1 agrandarán la figura, mientras que los factores de escala menores que 1 reducirán el tamaño.

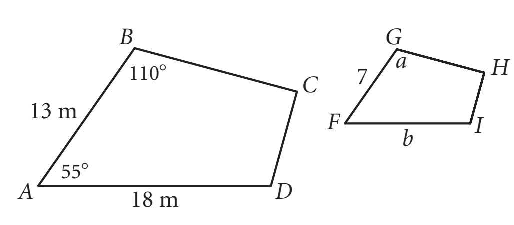
 

# Capítulo 11 • Ejercicios de repaso

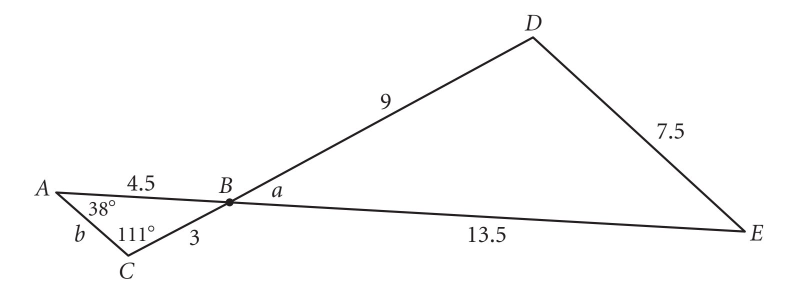
**Nombre** ______________________ **Período** __________ **Fecha** ____________

Redondea tus soluciones al décimo de unidad más cercano a menos que se indique lo contrario.

1. *(Lección 11.1) ABCD* $\sim$ *FGHI*. Halla *a* y *b*.

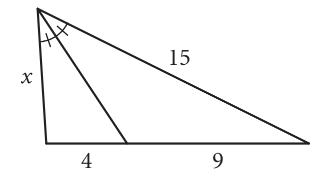



2. *(Leccion 11.2)* ¿Qué medio rápido de semejanza se puede usar para demostrar que $\triangle ABC \sim \triangle EBD$? Halla *a* y *b*.




3. *(Lección 11.3)* Rafael tiene 1.8 m de altura y proyecta una sombra de 0.5 m. Si a la misma hora un árbol cercano proyecta una sombra de 1.5 m, ¿qué altura tiene el árbol?

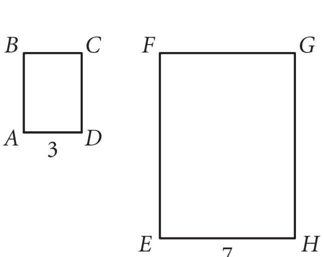
4. *(Lección 11.4)* Halla *x*.




5. *(Lección 11.5) ABCD* $\sim$ *EFGH*.

   Área de *ABCD* $= 15\text{ cm}^2$

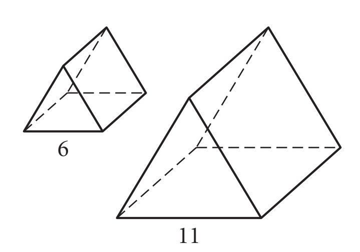
   Área de *EFGH* = ?



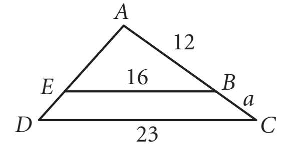

6. *(Lección 11.6)* Prisma triangular pequeño $\sim$ prisma triangular grande

   Volumen del prisma pequeño $= 48\text{ pulg}^3$

   Volumen del prisma grande = ?




7. *(Lección 11.7)* $EB \parallel CD$. Halla *a*.



# SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 11

**1.** Como los cuadriláteros son semejantes, los ángulos correspondientes son congruentes.

Entonces, $a = m\angle G = m\angle B = 110°$.

Como los dos cuadriláteros son semejantes, podemos fijar una proporción para hallar la longitud faltante.

$\frac{13}{7} = \frac{18}{b}$

$13b = 18 \cdot 7$ Multiplica ambos lados por 7; multiplica ambos lados por *b*.

$b \approx 9.7$ m Resuelve para *b*.

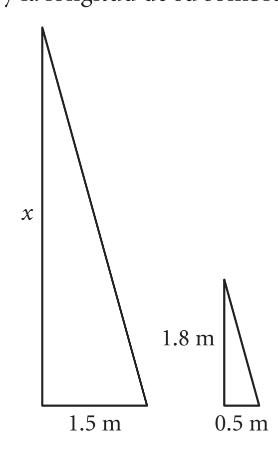
**2.** Dos pares de lados correspondientes son proporcionales $\left(\frac{13.5}{4.5} = \frac{9}{3}\right)$ y sus ángulos incluidos son congruentes (ángulos opuestos por el vértice $m\angle ABC$ y $\angle EBD$), entonces los triángulos son semejantes por la conjetura de semejanza SAS. Para hallar *a*, usa la conjetura de la suma angular en triángulos para hallar $\angle ABC$: $180° - 38° - 111° = 31°$. Como $\angle ABC \cong \angle EBD$, $a = m\angle EBD = 31°$. Para hallar *b*, resuelve la proporción.

$\frac{9}{3} = \frac{7.5}{b}$

$9b = 7.5 \cdot 3$ Multiplica ambos lados por 3; multiplica ambos lados por *b*.

$b = 2.5$ cm Resuelve para *b*.

**3.** Como los rayos del sol entran con un mismo ángulo a una hora del día en particular, todas las personas u objetos y sus sombras forman triángulos rectángulos semejantes. Entonces, la altura de Rafael y la longitud de su sombra son proporcionales a la altura del árbol y la longitud de su sombra.




$\frac{1.8}{0.5} = \frac{x}{1.5}$

$x = 5.4$ Multiplica ambos lados por 1.5.

El árbol tiene 5.4 m de altura.

**4.** La bisectriz del ángulo divide el lado opuesto en segmentos que son proporcionales a los otros dos lados del triángulo. Fija una proporción y resuelve.

$\frac{x}{15} = \frac{4}{9}$

$x \approx 6.7$ cm

**5.** Cuando dos figuras son semejantes, la razón de sus áreas es el cuadrado del factor de escala.

$\frac{AD}{EH} = \frac{3}{7}$ El factor de escala es la razón de los lados correspondientes.

$\frac{\text{Área de } ABCD}{\text{Área de } EFGH} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$ La razón de las áreas es el cuadrado del factor de escala.

$\frac{15}{x} = \frac{9}{49}$ Sustituye los valores.

$x \approx 81.7 \text{ cm}^2$ Resuelve para *x*.

**6.** Factor de escala $= \frac{6}{11}$ Halla el factor de escala.

$\frac{V_{\text{prisma pequeño}}}{V_{\text{prisma grande}}} = \left(\frac{6}{11}\right)^3$ La razón de los volúmenes es igual al cubo del factor de escala.

$\frac{48}{x} = \frac{216}{1331}$ Sustituye los valores.

$x \approx 295.8 \text{ in}^3$ Resuelve para *x*.

**7.** Por la proporcionalidad de las paralelas, los lados correspondientes son proporcionales.

$\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{DC}$

$\frac{12}{12 + a} = \frac{16}{23}$ Sustituye los valores.

$12 \cdot 23 = 16(12 + a)$ Multiplica ambos lados por 23 $(12 + a)$.

$276 = 192 + 16a$ Distribuye.

$a = 5.25$ Resuelve para *a*.

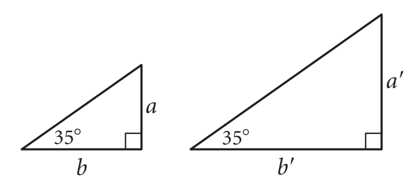
 




# Trigonometría

## Resumen del contenido

Si dos triángulos son semejantes, entonces sus lados correspondientes tienen la misma razón de longitudes. Digamos $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$. Pero las razones de las longitudes de lados correspondientes de cada triángulo también son iguales: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.




Ahora si dos triángulos *rectángulos* tienen un segundo ángulo congruente (además de sus ángulos rectos), entonces sus terceros ángulos también serán congruentes (por la conjetura de la suma angular en triángulos), de modo que los triángulos serán semejantes (por AAA). Por ende, las razones de las longitudes de los lados correspondientes de cada triángulo también son iguales. En otras palabras, todos los triángulos rectángulos con una cierta medida de ángulo agudo, digamos 35°, son semejantes entre sí. Entonces, las varias razones de las longitudes de los lados están asociadas con cualquier ángulo agudo, y éstas son las mismas para todos los triángulos rectángulos que contienen este ángulo.

### Razones trigonométricas

El estudio de las relaciones entre los lados y ángulos de los triángulos se denomina *trigonometría*. La razón entre las longitudes de dos lados en un triángulo rectángulo se denomina razón trigonométrica. Las tres razones más comúnmente utilizadas — *seno, coseno* y *tangente*— son el foco de este capítulo. El seno (abreviado sin) de un ángulo es la razón entre la longitud del cateto opuesto y la hipotenusa. Por ejemplo el seno de 30° es $\frac{1}{2}$. Esto significa que en cualquier triángulo rectángulo con un ángulo de 30°, el cateto opuesto al ángulo de 30° tiene $\frac{1}{2}$ de la longitud de la hipotenusa. El coseno (abreviado cos) de un ángulo es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa. La tangente (abreviada tan) es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente. Las razones trigonométricas para diversas medidas de ángulos pueden buscarse en una tabla trigonométrica. También pueden hallarse utilizando una calculadora con teclas de sin, cos y tan. Por ejemplo, sin 30° dará 0.5 siempre y cuando la calculadora este en la modalidad de grados. Algunos problemas requieren el inverso del seno, coseno o tangente —se conoce la razón de las longitudes y se necesita el ángulo. El inverso también puede hallarse utilizando una calculadora. Por ejemplo, $\sin^{-1} 0.5 = 30$.

Este capítulo se concentra principalmente en triángulos rectángulos, pero cualquier triángulo siempre puede dividirse en dos triángulos rectángulos. Entonces, la trigonometría también nos ayuda a comprender otros tipos de triángulos y brinda medios rápidos para trabajar con triángulos no-rectángulos de igual manera. La Ley de los senos, la Ley de los cosenos y la conjetura del área SAS son válidas para todos los triángulos.

(continúa)

## Problema resumen

¿Cómo puede hallar el área de una parcela de tierra triangular cuyos lados tienen 5 km, 8 km y 9 km?

Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Qué sabes acerca del las áreas de los triángulos?
- ¿Qué necesitarías saber para aplicar la fórmula que usa la base y la altitud?
- ¿Cómo podrías determinar esas cantidades?

## Ejemplos de respuestas

Su estudiante puede haber visto o no la fórmula de Herón en la exploración de fórmulas de área alternativas del Capítulo 8. Esta fórmula da cerca de 19.9 km$^2$. Probablemente, los estudiantes pensarán en la fórmula estándar del área de un triángulo, $A = \frac{1}{2}bh$. Sin embargo la altura debe medirse perpendicularmente a la base. Cualquier lado puede servir de base; para hallar la altitud con respecto a ese lado, los estudiantes necesitan un ángulo. Pueden utilizar la Ley de los cosenos para encontrar un ángulo en un extremo de la base elegida. Luego pueden aplicar la conjetura del área de un triángulo SAS para hallar el área. Por ejemplo, si la base elegida es el lado de longitud 9 km, entonces el ángulo $x$ entre ese lado y el lado de longitud 8 km, puede hallarse utilizando la Ley de los cosenos:

$$5^2 = 9^2 + 8^2 - 2(9)(8)\cos x$$ Sustituya los valores en la Ley de los Cosenos.

$$\frac{25 - 81 - 64}{-144} = \cos x$$ Resuelva para cos $x$.

$$x = \cos^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)$$ Use el coseno inverso para hallar $x$.

$$x \approx 33.6°$$

El seno de este ángulo es la razón entre la altitud y el lado de longitud 8 km. La altitud es entonces 8 veces el seno de este ángulo, o aproximadamente 4.42 km. El área es 0.5(4.42)(9), aproximadamente 19.9 km$^2$.

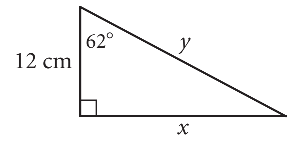
 

# Capítulo 12 • Ejercicios de repaso

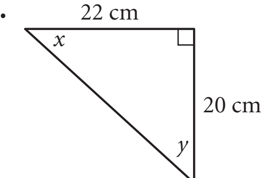
**Nombre** ______________________ **Período** __________ **Fecha** ____________

1. *(Lecciones 12.1, 12.2)* Halla la medida faltante redondeándola al décimo de unidad más cercano.

**a.**

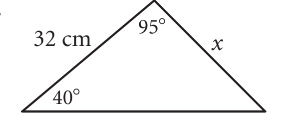



**b.**

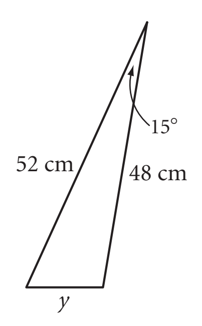



2. *(Lecciones 12.3, 12.4)* Halla las longitudes faltantes al centímetro más cercano.

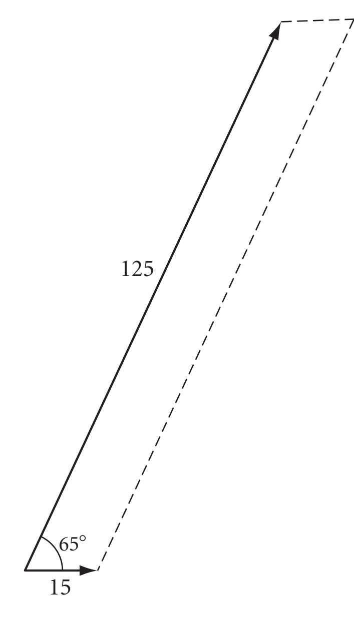
**a.**




**b.**




3. *(Lección 12.5)* Radha está piloteando su avión con la inclinación que se muestra. Su velocidad es de 125 mi/h. Hay viento de costado de 15 mi/h. ¿Cuál es la velocidad resultante $T$?



## SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 12

**1. a.** $\tan 62° = \frac{x}{12}$

$x = 12 \tan 62°$

$x \approx 22.6$ cm

$\cos 62° = \frac{12}{y}$

$y \cos 62° = 12$

$y = \frac{12}{\cos 62°}$

$y \approx 25.6$ cm

**b.** $\tan x = \frac{20}{22}$

$\tan x = 0.909$

$x = \tan^{-1}(0.909)$

$x \approx 42.3°$

$y = 180° - 90° - x$

$y \approx 47.7°$

**2. a.** Según la conjetura de la suma angular en triángulos, el ángulo faltante es de 45°.

Ley de los senos:

$\frac{\sin 45°}{32} = \frac{\sin 40°}{x}$

$x \sin 45° = 32 \sin 40°$

$x = \frac{32 \sin 40°}{\sin 45°}$

$x \approx 29.1$ cm

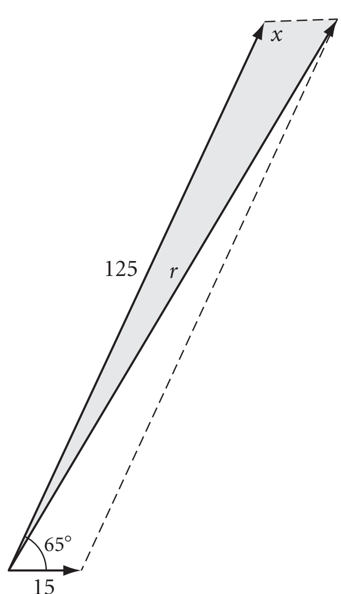
**b.** Ley de los cosenos

$y^2 = 52^2 + 48^2 - 2(52)(48)\cos 15°$

$y^2 \approx 186.1$

$y \approx 13.6$ cm

**3.** La diagonal del paralelogramo es la velocidad resultante. Puedes usar la Ley de los cosenos, pero necesitas saber por lo menos la medida de un ángulo en el triángulo sombreado. Como el diagrama es un paralelogramo, los ángulos adyacentes son suplementarios.




Por lo tanto, $65° + x = 180$, entonces $x = 115°$. Ahora puedes usar la Ley de los cosenos para hallar $r$.

$r^2 = 15^2 + 125^2 - 2(15)(125)\cos 115°$

$r^2 \approx 17{,}434.8$

$r \approx 132$ mi/h




# Geometría como sistema matemático

## Resumen del contenido

Habiendo experimentado todos los conceptos de un curso estándar de geometría, los estudiantes están listos para examinar el marco de trabajo del conocimiento geométrico que han aprendido. Los estudiantes ahora repasan y profundizan su comprensión de aquellos conceptos, demostrando algunas de las conjeturas más importantes en el contexto de un sistema lógico, comenzando con las premisas de la geometría.

### Premisas y teoremas

Un sistema deductivo completo debe comenzar con algunas suposiciones que estén claramente enunciadas e, idealmente, sean tan obvias que no necesiten ser defendidas. El Capítulo 13 comienza exponiendo sus suposiciones: propiedades de la aritmética e igualdad, postulados de la geometría y una definición de congruencia para ángulos y segmentos de recta. Estas suposiciones básicas se denominan *premisas*. Todo lo demás se basa en estas premisas.

Luego, los estudiantes desarrollan demostraciones de sus conjeturas relativas a triángulos, cuadriláteros, círculos, semejanza y geometría de coordenadas. Una vez que se ha probado una conjetura, se denomina *teorema*. Cada paso de una prueba debe ser respaldada por una premisa o un teorema previamente probado.

### Desarrollo de una prueba

El desarrollo de una prueba es más arte que ciencia. Los matemáticos no se sientan y escriben de una vez una prueba de principio a fin, de modo que dígale a su estudiante que no espere hacerlo. Las pruebas requieren de pensamiento y creatividad. Generalmente, el estudiante comenzará escribiendo lo que está dado y lo que se pretende demostrar —el principio y el final de la prueba. Luego, quizá utilizando diagramas, el estudiante volverá a expresar la primera y última afirmación de varias maneras, buscando una idea de cómo llegar de uno al otro lógicamente. Puede recordarle sobre las estrategias de razonamiento que pueden ayudar a planificar una prueba:

- Dibuje un diagrama rotulado y marque lo que sabe
- Represente una situación algebraicamente
- Aplique conjeturas y definiciones previas
- Divida al problema en partes
- Agregue una recta auxiliar
- Piense de atrás para adelante

Preguntas que puede hacer a su estudiante: "¿Qué puedes concluir con las afirmaciones dadas?" y "¿Qué hace falta para probar la última afirmación?" Viendo las conexiones, el estudiante puede desarrollar un plan, quizás expresado mediante organigramas. Hay varias maneras de expresar el plan, y su estudiante podrá utilizar más de una. Luego puede escribir la prueba, teniendo cuidado de revisar el razonamiento. Una buena manera de cuidar los detalles es escribir una prueba de dos columnas, con afirmaciones en la primera columna y los motivos en la segunda. Su estudiante podría encontrar lagunas en su razonamiento y tener que volver a la etapa de planificación.

Si no parece haber ninguna manera de probar la afirmación, puede sugerir el razonamiento indirecto, en el cual el estudiante demuestra que la *negación* del teorema es *falsa*. De allí se deduce que el teorema debe ser verdadero.

**(continúa)**

## Problema resumen

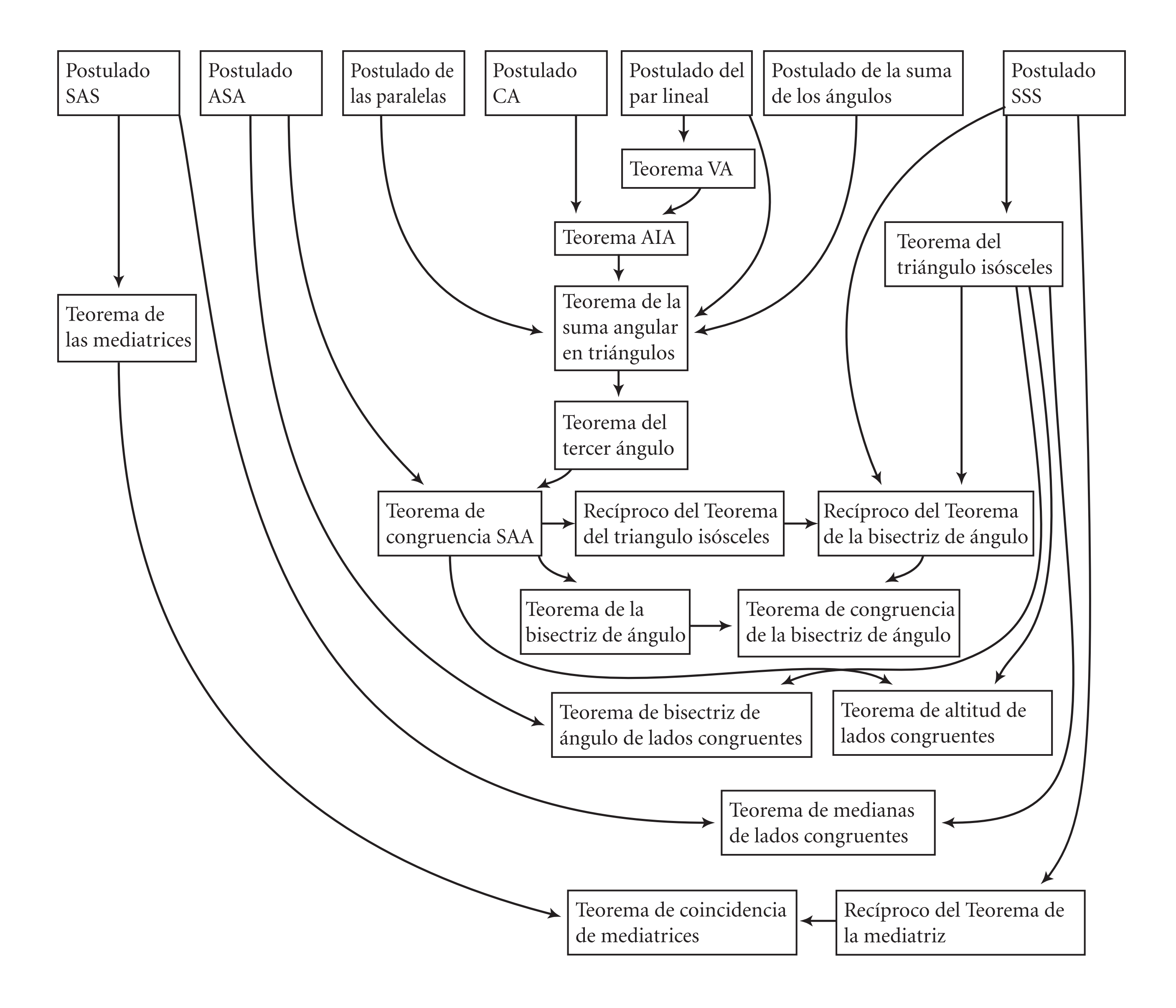
Dibuje un diagrama que dé un árbol genealógico para todos los teoremas de triángulos que aparecen en los ejercicios de la Lección 13.3. Incluya postulados y teoremas, pero no definiciones ni propiedades.

Preguntas que puede hacerle en su rol de estudiante a su estudiante:

- ¿Puedes ampliar árbol de la página 707?
- ¿Qué representan las flechas en palabras?

## Ejemplos de respuestas

Un árbol genealógico muestra cómo los teoremas se respaldan unos a otros. Un teorema puede depender de varios teoremas, cada uno de los cuales depende de otros teoremas y así sucesivamente, hasta llegar a los postulados de la geometría. La parte superior del árbol genealógico debería tener todos los postulados, y todas las flechas deberían fluir desde allí hacia abajo. Los diagramas pueden resultar bastante complejos. No se preocupe demasiado por la prolijidad o cuán completo esté; el objetivo es ver cómo se puede ampliar la estructura mientras se repasan los teoremas. Aquí está el árbol completo.



# Capítulo 13 • Ejercicios de repaso

**Nombre** ______________________ **Período** __________ **Fecha** ____________

1. *(Lección 13.1)* Nombra la propiedad que respalda cada afirmación:

   **a.** Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{CD} \cong \overline{EF}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{EF}$.

   **b.** Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces $AB = CD$.

2. *(Lecciones 13.2, 13.3)* En la Lección 13.2, Ejemplo B, el Teorema de la suma angular en triángulos se prueba con una prueba de organigrama. Vuelve a escribir esta prueba usando una prueba de dos columnas.

   **Dado:** $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ son los tres ángulos de $\triangle ABC$

   **Demuestra:** $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$

3. *(Lecciones 13.2, 13.4)* Responde las siguientes preguntas para el enunciado, "Las diagonales de un trapecio isósceles son congruentes".

   **a.** **Tarea 1:** Identifica lo dado y lo que debes demostrar.

   **b.** **Tarea 2:** Dibuja y rotula un diagrama para ilustrar la información dada.

   **c.** **Tarea 3:** Vuelve a formular lo dado y lo que debes demostrar en términos de tu diagrama.

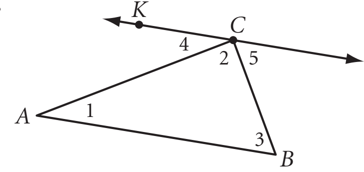
4. *(Lección 13.6)* Escribe una prueba para el Teorema de arcos congruentes con secantes paralelas: Las rectas paralelas cortan arcos congruentes sobre un círculo.

5. *(Lección 13.7)* Escribe una prueba para el Teorema de las altitudes correspondientes: Si dos triángulos son semejantes, entonces las altitudes correspondientes son proporcionales a los lados correspondientes.

**1. a.** Propiedad transitiva

**b.** Definición de congruencia

**2.**

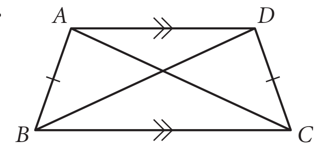



| Afirmación | Motivo |
|---|---|
| $\angle 1$, $\angle 2$ y $\angle 3$ de $\triangle ABC$ | Dado |
| Construye $\overleftrightarrow{KC} \parallel \overline{AB}$ | Postulado de paralelo |
| $\angle 1 \cong \angle 4$; $\angle 3 \cong \angle 5$ | Teorema de ángulos alternos internos |
| $m\angle 1 = m\angle 4$; $m\angle 3 = m\angle 5$ | Definición de congruencia |
| $m\angle 4 + m\angle 2 = m\angle KCB$ | Postulado de suma angular |
| $\angle KCB$ and $\angle 5$ son suplementarios | Postulado de par linear |
| $m\angle KCB + m\angle 5 = 180°$ | Definición de suplementario |
| $m\angle 4 + m\angle 2 + m\angle 5 = 180°$ | Propiedad de sustitución de igualdades |
| $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 180°$ | Propiedad de sustitución de igualdades |

**3. a. Dado:** Trapecio isósceles

**Demuestra:** Las diagonales son congruentes

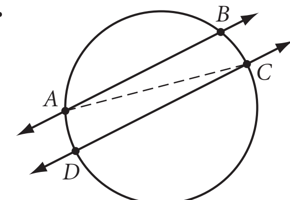
**b.**




**c. Dado:** $\overline{AB} \cong \overline{DC}$; $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

**Demuestra:** $\overline{AC} \cong \overline{DB}$

**4.**



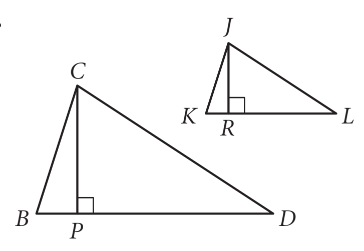

**Dado:** $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

**Demuestra:** $\overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{BC}$

| Afirmación | Motivo |
|---|---|
| $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$ | Dado |
| Construye $\overline{AC}$ | Postulado de rectas |
| $\angle DCA \cong \angle BAC$ | Teorema de ángulos alternos internos |
| $m\angle DCA = m\angle BAC$ | Definición de congruencia |
| $\frac{1}{2}m\angle BAC = \frac{1}{2}m\angle DCA$ | Propiedad de la multiplicación de igualdades |
| $m\overset{\frown}{AD} = \frac{1}{2}m\angle DCA$ | Teorema de ángulos inscritos |
| $m\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}m\angle BAC$ | Teorema de ángulos inscritos |
| $m\overset{\frown}{AD} = m\overset{\frown}{BC}$ | Propiedad de sustitución de igualdades |
| $\overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{BC}$ | Definición de congruencia |

**5.**




**Dado:** $\triangle CBD \sim \triangle JKL$; Altitudes $\overline{CP}$ y $\overline{JR}$

**Demuestra:** $\frac{CP}{JR} = \frac{CB}{JK}$

| Afirmación | Motivo |
|---|---|
| $\triangle CBD \sim \triangle JKL$; Altitudes $\overline{CP}$ y $\overline{JR}$ | Dado |
| $\overleftrightarrow{CP} \perp \overleftrightarrow{BD}$; $\overleftrightarrow{JR} \perp \overleftrightarrow{KL}$ | Definición de altitud |
| $\angle CPB$ y $\angle JRK$ son ángulos rectos | Definición de perpendicular |
| $\angle CPB \cong \angle JRK$ | Teorema de ángulos rectos son congruentes |
| $\angle CBD \cong \angle JKL$ | Los ángulos correspondientes de triángulos semejantes son congruentes |
| $\triangle CBP \sim \triangle JKR$ | Postulado de semejanza AA |
| $\frac{CP}{JR} = \frac{CB}{JK}$ | Los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales |




# Los fundamentos de geometría

En esta lección

- Conocerás los **puntos,** las **rectas** y los **planos,** y cómo representarlos
- Aprenderás las definiciones de **colineal, coplanar, segmento de recta, segmentos congruentes, punto medio** y **semirrecta**
- Aprenderás la **notación geométrica** para rectas, segmentos de rectas, semirrectas y congruencia

Los **puntos,** las **rectas** y los **planos** son los fundamentos de la geometría. Consulta estos tres conceptos en la página 28 de tu libro.

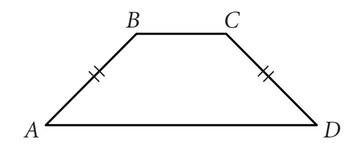
Una **definición** es una afirmación que explica el significado de una palabra o frase. Es imposible definir *punto, recta* y *plano* sin usar otras palabras que a su vez requieren definición. Por esta razón, estos términos permanecen sin definición. Al usar estos tres términos indefinidos, puedes definir todas las demás figuras y términos geométricos.

Mantén una lista de definiciones en tu cuaderno. Cada vez que encuentres una nueva definición geométrica, añádela a tu lista. Ilustra cada definición con un dibujo. Comienza tu lista con las definiciones de **colineal, coplanar** y **segmento de recta,** dadas en las páginas 29–30 de tu libro.

Asegúrate de que comprendes las dos formas de expresar la longitud de un segmento. Por ejemplo, para expresar el hecho de que la longitud del segmento $FG$ es de 12 unidades, puedes escribir $FG = 12$ o $m\overline{FG} = 12$.

Se dice que dos segmentos son **congruentes** cuando sus medidas o longitudes son iguales. El signo para la congruencia es $\cong$. Es importante recordar que el signo de igualdad, $=$, se usa entre números o medidas iguales, mientras que el signo de congruencia, $\cong$, se usa entre figuras congruentes.

En los dibujos geométricos, los segmentos congruentes se señalan con signos idénticos. En la figura siguiente, $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{DC}$. Puedes indicar que estos segmentos tienen las mismas longitudes en cualquiera de las siguientes formas: $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $AB = DC$, $m\overline{AB} = m\overline{DC}$.




El **punto medio** de un segmento es un punto que divide el segmento en dos segmentos congruentes. Trabaja con el ejemplo de tu libro para adquirir práctica en la identificación de los puntos medios y los segmentos congruentes, y en el uso de la notación geométrica. He aquí otro ejemplo.

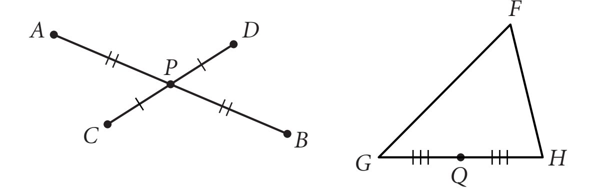
**(continúa)**

***EJEMPLO***

Estudia los diagramas siguientes.

**a.** Nombra cada punto medio y el segmento que biseca.

**b.** Nombra todos los segmentos congruentes. Usa el signo de congruencia para escribir tu respuesta.

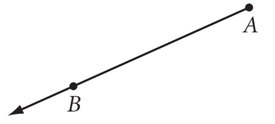



► ***Solución***

**a.** $P$ es el punto medio tanto de $\overline{AB}$ como de $\overline{CD}$. $Q$ es el punto medio de $\overline{GH}$.

**b.** $\overline{AP} \cong \overline{PB}$, $\overline{CP} \cong \overline{PD}$, $\overline{GQ} \cong \overline{QH}$

Una **semirrecta** es una parte de una recta que comienza en un punto y se extiende infinitamente en una dirección. Una semirrecta se designa con dos letras. La primera letra es el extremo y la segunda letra es cualquier otro punto sobre la semirrecta. Así que la semirrecta $AB$, abreviada $\overrightarrow{AB}$, es la parte de la recta $AB$ que contiene el punto $A$ y todos los puntos sobre $\overleftrightarrow{AB}$ que están del mismo lado del punto $A$ que $B$.




Ahora repasa la Lección 1.1 de tu libro y asegúrate de que has anotado todas las nuevas definiciones en tu cuaderno.

## Investigación: Modelos matemáticos

En tu libro, usa la fotografía y la figura al comienzo de la investigación para identificar ejemplos reales y modelos matemáticos para cada uno de los siguientes términos: punto, recta, plano, segmento de recta, segmentos congruentes, punto medio de un segmento y semirrecta. Por ejemplo, un segmento de recta puede ser representado por la orilla superior de una ventana en la fotografía, y un punto representado por el punto rotulado A en la figura.

Ahora explica en tus propias palabras qué significa cada uno de esos términos.




# Matemáticas del billar

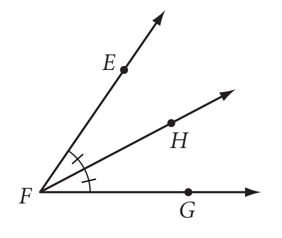
En esta lección

- Conocerás los **ángulos** y cómo medirlos
- Identificarás los **ángulos congruentes** y las **bisectrices de ángulos**
- Aplicarás tus conocimientos de los ángulos para solucionar problemas relacionados con el billar

Un **ángulo** consiste en dos semirrectas con un extremo común, siempre y cuando éstas no caigan sobre la misma recta. Las dos semirrectas son los **lados** del ángulo y el extremo común es el **vértice.** de tu libro, lee el texto anterior al Ejemplo A, que explica cómo denominar los ángulos. Después trabaja con el Ejemplo A.

La **medida de un ángulo** es la menor cantidad de rotación alrededor del vértice, de una semirrecta a la otra. La **medida reflejo de un ángulo** es la mayor cantidad de rotación menor que 360° entre dos semirrectas. En este curso, los ángulos se miden en **grados.** Lee de tu libro el texto referente a las medidas de los ángulos, prestando especial atención a las instrucciones para usar un **transportador.** Después usa tu transportador para medir los ángulos en el Ejemplo B.

Dos ángulos son **congruentes** si y solamente si tienen iguales medidas. Una semirrecta es la **bisectriz del ángulo** si contiene el vértice y divide el ángulo en dos ángulos congruentes. En el diagrama de la derecha, $\overrightarrow{FH}$ biseca a $\angle EFG$, por lo que $\angle EFH \cong \angle GFH$. Se utilizan marcas idénticas para mostrar que dos ángulos son congruentes.

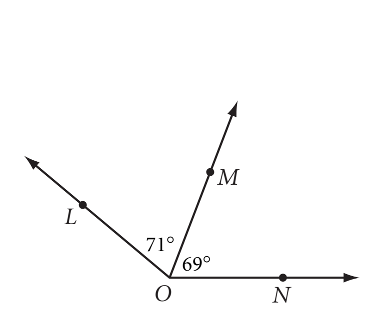


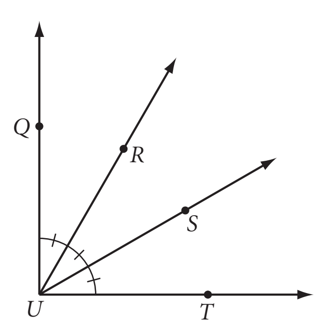

Trabaja con el Ejemplo C de tu libro. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO*** Busca las bisectrices de los ángulos y los ángulos congruentes en el diagrama de abajo.

**a.** Nombra cada bisectriz de los ángulos y el ángulo que ésta biseca.

**b.** Nombra todos los ángulos congruentes.




▶ ***Solución*** **a.** $\overrightarrow{US}$ biseca a $\angle RUT$. $\overrightarrow{UR}$ biseca a $\angle QUS$.

**b.** $\angle SUT \cong \angle RUS \cong \angle QUR$ y $\angle QUS \cong \angle RUT$

**(continúa)**

## Investigación: Billar virtual

El billar es un juego de ángulos. Lee lo referente a los **ángulos de entrada** y los **ángulos de salida** de tu libro.

Observa el diagrama de la mesa de billar en la página 42 de tu libro. Imagina que la bola se impulsa hacia el punto *C*. El ángulo de entrada es $\angle 1$. Usa tu transportador para encontrar la medida de $\angle 1$.

La medida del ángulo de salida debe ser igual a la medida del ángulo de entrada. Mide $\angle BCP$ y $\angle ACP$. ¿Cuál de estos ángulos es el ángulo de salida? ¿En cuál punto golpeará la bola—en el punto *A* o en el punto *B*?

Ahora imagina que deseas que la bola choque contra la banda $\overleftrightarrow{WA}$, de manera que la bola rebote y golpée la bola 8. ¿En qué punto—*W*, *X* o *Y*—debes golpear? Una forma de encontrar la respuesta es medir cada posible ángulo de entrada y después verificar si la semirrecta del ángulo de salida congruente pasa por la bola 8.

Ahora piensa cómo tendrías que golpear la bola contra la banda $\overleftrightarrow{CP}$, de manera que rebote y rebase su punto de inicio. Si no lo sabes, trata de experimentar con diversos ángulos de entrada. Cada vez, piensa cómo puedes ajustar el ángulo para hacer que la bola pase más cerca de su punto de inicio.

Supón que deseas golpear la bola de manera que rebote en las bandas al menos tres veces, pero que nunca toque la banda $\overleftrightarrow{CP}$. Nuevamente, si no lo sabes, experimenta. Intenta distintos ángulos de entrada y distintas bandas, hasta que comiences a ver un patrón.




# ¿Qué es un *widget*?

En esta lección

- Aprenderás cómo escribir una buena definición
- Escribirás definiciones para términos geométricos
- Probarás definiciones buscando **contraejemplos**

En geometría, es muy importante poder escribir definiciones claras y precisas. En el texto de la página 47 de tu libro se analiza cómo escribir una buena definición. Lee ese texto atentamente. Después trabaja con el Ejemplo A. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO A***

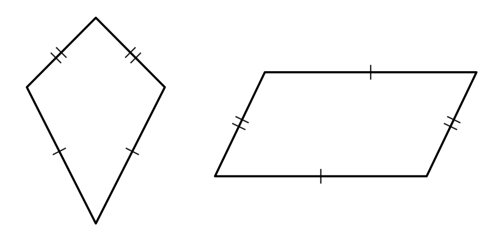
Considera esta "definición" de *rectángulo:* "Un rectángulo es una figura que tiene dos pares de lados congruentes".

**a.** Dibuja un **contraejemplo.** Es decir, dibuja una figura con dos pares de lados congruentes que no sea un rectángulo.

**b.** Escribe una mejor definición para *rectángulo*.

▶ ***Solución***

**a.** He aquí dos contraejemplos.



**b.** Una mejor definición sería: "Un rectángulo es una figura de 4 lados en la que los lados opuestos son congruentes y todos los ángulos miden 90°".

Lee en tu libro la sección llamada *"Beginning Steps to Creating a Good Definition"* (los pasos iniciales para crear una buena definición), y asegúrate de comprender los pasos. Observa los símbolos que representan paralelo, perpendicular y 90°. Ahora trabaja con el Ejemplo B, que te pide escribir definiciones para *rectas paralelas* y *rectas perpendiculares.*

## Investigación: Definición de ángulos

En esta investigación escribirás definiciones para algunos términos importantes relacionados con los ángulos.

En la página 49 de tu libro, observa los ejemplos de ángulos rectos y de ángulos que no son rectos. ¿Qué tienen en común los ángulos rectos? ¿Qué características tienen los ángulos rectos que los otros ángulos no tienen? Debes notar que todos los ángulos rectos miden 90°. Los ángulos del otro grupo tienen medidas menores o mayores que 90°. Basándote en esta información, podrías escribir la siguiente definición para *ángulo recto.*

Un **ángulo recto** es un ángulo que mide 90°.

**(continúa)**

Ahora observa los ángulos agudos y los ángulos que no son agudos. Trata de usar los ejemplos para escribir una definición para **ángulo agudo.** Cuando hayas escrito tu definición, pruébala tratando de encontrar un contraejemplo. Cuando estés satisfecho con tu definición, observa el siguiente conjunto de ejemplos y escribe una definición para **ángulo obtuso.**

Los restantes conjuntos de ejemplos muestran pares de ángulos. Observa los pares de ángulos opuestos por el vértice (*vertical angles*) y los pares de ángulos que no lo son. ¿Qué adviertes? Debes ver que cada par de ángulos opuestos por el vértice está formado por dos rectas que se intersecan. Podrías comenzar con la siguiente definición.

> Dos ángulos son un **par de ángulos opuestos por el vértice** si están formados por dos rectas que se intersecan.

Sin embargo, $\angle 1$ y $\angle 2$, que pertenecen al grupo de "ángulos que no son pares de ángulos opuestos por el vértice", también están formados por dos rectas que se intersecan. ¿Por qué es diferente este par de los pares de ángulos del grupo de "ángulos opuestos por el vértice"? Cuando sepas la respuesta, trata de completar esta definición.

> Dos ángulos son un **par de ángulos opuestos por el vértice** si están formados por dos rectas que se intersecan y ____________________.

Ahora observa los pares lineales de ángulos y los pares de ángulos que no son pares lineales. Escribe una definición para **par lineal de ángulos.** Asegúrate de probar tu definición buscando un contraejemplo. La siguiente es una posible definición. Es posible que tú hayas escrito una definición diferente.

> Dos ángulos forman un **par lineal de ángulos** si comparten un lado y sus otros lados forman una línea recta.

Repite este proceso para definir **par de ángulos complementarios** y **par de ángulos suplementarios.** Piensa cuidadosamente cuál es la diferencia entre un par suplementario y un par lineal. Asegúrate de que tus definiciones tomen en cuenta la diferencia.

Una figura con rótulos a menudo puede ser muy útil al escribir una definición geométrica. Trabaja con el Ejemplo C de tu libro. Aquí hay otro ejemplo.

***EJEMPLO B*** | Usa una figura rotulada para definir un *par de ángulos opuestos por el vértice.*

***Solución*** | $\angle AOC$ and $\angle BOD$ son un par de ángulos opuestos por el vértice si $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ intersecan en el punto $O$, y el punto $O$ está entre los puntos $A$ y $B$ y también entre los puntos $C$ y $D$.



En la definición, ¿es necesario decir que el punto $O$ está entre otros dos puntos de cada recta? Dibuja un contraejemplo que demuestre por qué es necesaria esta parte de la definición.

Añade las definiciones de todos los términos nuevos de esta lección a tu lista de definiciones. Acuérdate incluir un dibujo con cada definición.




# Polígonos

En esta lección

- Aprenderás la definición de **polígono**
- Aprenderás el significado de términos asociados con polígonos, como **cóncavo, convexo, equilátero, equiángulo** y **regular**
- Identificarás los **polígonos congruentes**

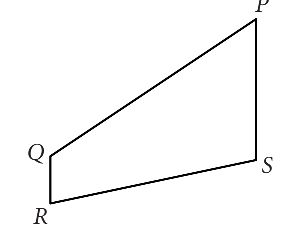
Un **polígono** es una figura cerrada en un plano, formada al conectar segmentos de rectas, extremo por extremo, en donde cada segmento interseca exactamente a otros dos.

Observa atentamente los ejemplos de "polígonos" y "no polígonos" en la página 54 de tu libro. Verifica que cada figura del grupo de "polígonos" se ajuste a la definición. Después intenta explicar por qué cada figura del grupo de "no polígonos" no es un polígono.

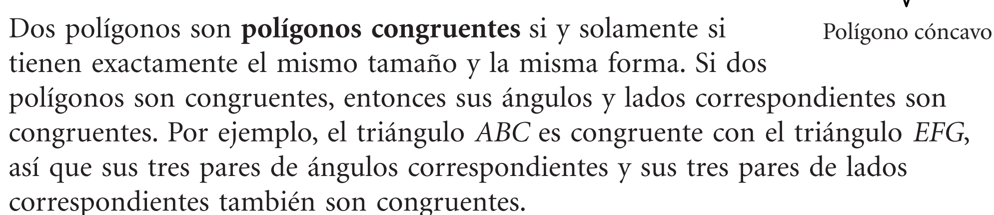
Cada segmento de recta de un polígono es un **lado** del polígono. Cada extremo en el que los lados se juntan es un **vértice** del polígono.

Los polígonos se clasifican por el número de lados que tienen. En la tabla de la página 54 de tu libro se proporcionan los nombres de polígonos con distintos números de lados.

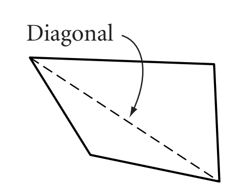
A un polígono se le da nombre enumerando sus vértices en orden consecutivo. No importa en qué vértice se empiece. Por ejemplo, podrías denominar el siguiente polígono como el cuadrilátero *PQRS* o *RQPS*, pero no *PRQS*. Cuando denominas un triángulo, puedes usar el símbolo $\triangle$. Por ejemplo, $\triangle XYZ$ significa el triángulo *XYZ*.




Una **diagonal** de un polígono es un segmento de recta que conecta dos vértices *no consecutivos*. Un polígono es **convexo** si no hay diagonal fuera del polígono. Un polígono es **cóncavo** si hay al menos una diagonal fuera del polígono. Lee la página 54 de tu libro para ver más ejemplos de polígonos convexos y cóncavos.




Polígono cóncavo

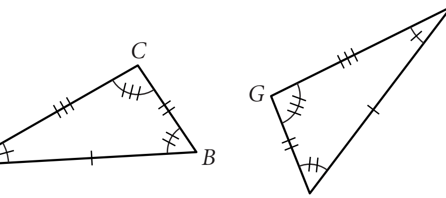



Polígono convexo

Dos polígonos son **polígonos congruentes** si y solamente si tienen exactamente el mismo tamaño y la misma forma. Si dos polígonos son congruentes, entonces sus ángulos y lados correspondientes son congruentes. Por ejemplo, el triángulo *ABC* es congruente con el triángulo *EFG*, así que sus tres pares de ángulos correspondientes y sus tres pares de lados correspondientes también son congruentes.

$\angle A \cong \angle E$ $\quad$ $\angle B \cong \angle F$ $\quad$ $\angle C \cong \angle G$

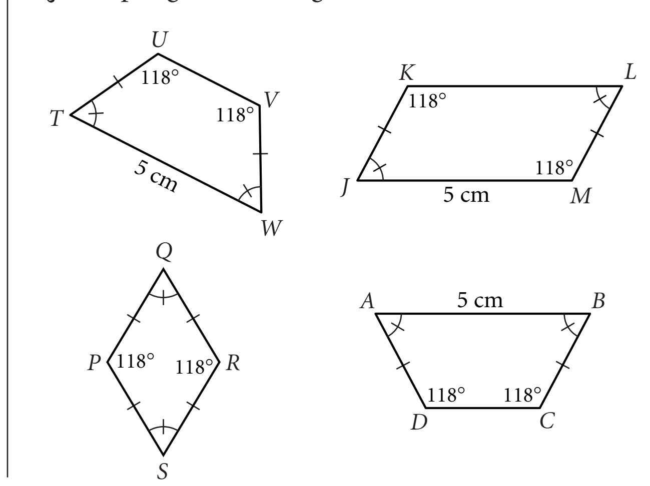
$\overline{AB} \cong \overline{EF}$ $\quad$ $\overline{BC} \cong \overline{FG}$ $\quad$ $\overline{CA} \cong \overline{GE}$




Cuando escribas una proposición de congruencia, siempre escribe las letras de los vértices correspondientes en un orden que muestre la correspondencia. Por ejemplo, referente a los triángulos a la derecha, las afirmaciones $\triangle ABC \cong \triangle EFG$ y $\triangle CAB \cong \triangle GEF$ son correctas, pero $\triangle ABC \cong \triangle FEG$ es incorrecta.

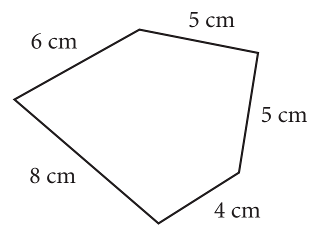
**(continúa)**

***EJEMPLO*** ¿Cúal polígono es congruente con *TUVW*?




▶ ***Solución*** Polígono $TUVW \cong$ polígono $BCDA$. También podrías decir $TUVW \cong ADCB$.

El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de sus lados. El perímetro del polígono a la derecha es 28 cm.




## Investigación: Polígonos especiales

En esta investigación escribirás definiciones para tres polígonos especiales.

de tu libro, observa los polígonos equiláteros y los polígonos que no son equiláteros. ¿Qué características tienen los polígonos equiláteros que los otros polígonos no tienen? Debes observar que en cada polígono equilátero, todos los lados tienen igual longitud, mientras que en un polígono que no es equilátero, no todos los lados tienen igual longitud. Basándote en esta observación puedes escribir la siguiente definición:

Un **polígono equilátero** es un polígono en el cual todos los lados tienen igual longitud.

Ahora observa los polígonos equiángulos y los polígonos que no son equiángulos. Usa los ejemplos para escribir una definición de **polígono equiángulo.**

Finalmente, observa los polígonos que son polígonos regulares y los que no son polígonos regulares. Decide cuáles características separan a los polígonos en los dos grupos y escribe una definición de **polígono regular.** Tu definición puede ser de esta manera:

Un **polígono regular** es un polígono que es ________ y ________.

Añade las definiciones de todos los términos nuevos de esta lección a tu lista de definiciones. Asegúrate de incluir un dibujo con cada definición.




# Triángulos

En esta lección

- Aprenderás a interpretar diagramas geométricos
- Escribirás definiciones para tipos de triángulos

Cuando ves un diagrama geométrico, debes tener cuidado de no hacer demasiadas suposiciones. Por ejemplo, *no* debes suponer que dos segmentos que parecen tener la misma longitud en realidad tengan la misma longitud, a menos que estén señalados como congruentes.

Puedes suponer:

que las rectas son derechas y si dos rectas intersecan se intersecan en un punto.

que todos los puntos en una recta son colineares y todos los puntos en un diagrama son coplanares a menos que los planos estén dibujados para demostrar que no son coplanares.

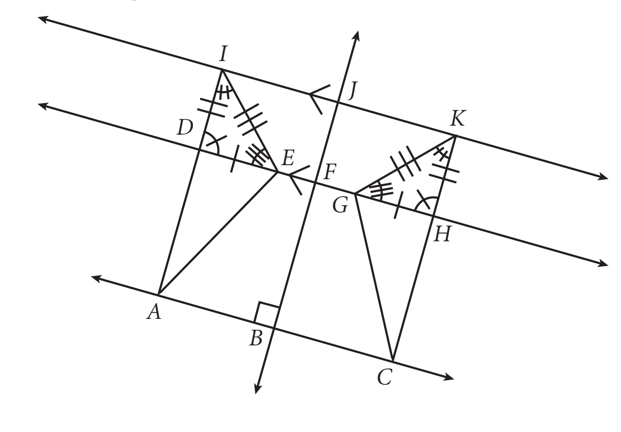
No puedes suponer:

que las rectas son paralelas a menos que estén señaladas como paralelas.

que las rectas son perpendiculares a menos que estén señaladas como perpendiculares.

que los pares de ángulos, segmentos, o polígonos son congruentes a menos que estén señalados con información que indique que son congruentes.

***EJEMPLO*** En la siguiente figura, ¿qué pares de rectas son paralelas? ¿Qué pares de rectas son perpendiculares? ¿Qué pares de triángulos son congruentes?




▶ ***Solución*** Las rectas *IJ* y *EG* son paralelas. Las rectas *BF* y *AC* son perpendiculares. Los triángulos *IDE* y *KHG* son congruentes.

**(continúa)**

## Investigación: Triángulos

En esta investigación escribirás definiciones para tipos de triángulos.

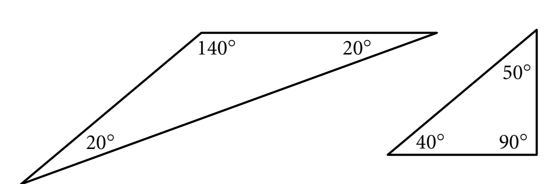
En tu libro observa los triángulos rectángulos y las figuras que no son triángulos rectángulos. ¿Qué tienen en común los triángulos rectángulos? ¿Qué características tienen los triángulos rectángulos que los otros triángulos no tienen? Debes observar que todos los triángulos rectángulos tienen un ángulo recto (un ángulo que mide 90°). Ninguno de los otros triángulos tiene un ángulo recto. Basándote en esta información, podrías escribir la siguiente definición para un triángulo rectángulo.

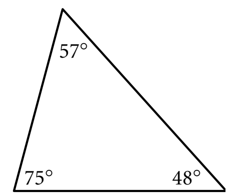
Un **triángulo rectángulo** es un triángulo con un ángulo recto.

Ahora, observa los triángulos agudos y los triángulos que no son agudos.

Usa los ejemplos para escribir una definición de **triángulo agudo.** Cuando hayas escrito tu definición, pruébala intentando encontrar un contraejemplo. Cuando estés satisfecho con tu definición, ve el siguiente conjunto de ejemplos y escribe una definición de **triángulo obtuso.**

Repasa tus definiciones de *triángulo rectángulo, triángulo agudo* y *triángulo obtuso.* Si tus definiciones son correctas, cualquier triángulo que se te presente se ajustará a *una y solamente una* de estas definiciones. Verifica que cada uno de los siguientes triángulos se ajuste a una y solamente una de tus definiciones. Si no es así, perfecciona tus definiciones.

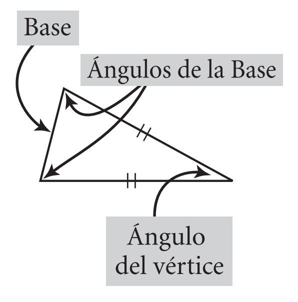



57°
75°
48°

Observa los siguientes tres conjuntos de ejemplos y escribe definiciones para **triángulo escaleno, triángulo equilátero** y **triángulo isósceles.** (*Sugerencia*: Concéntrate en las longitudes de los lados de los triángulos.) Si tus definiciones son correctas, cualquier triángulo se ajustará a una y solamente una de estas definiciones. Dibuja varios triángulos y prueba cada uno para asegurarte que esto es cierto. Si no es así, perfecciona tus definiciones.

En un triángulo isósceles, el ángulo entre los dos lados de igual longitud se llama el **ángulo del vértice.** El lado opuesto al ángulo del vértice se llama **base** del triángulo isósceles. Los dos ángulos opuestos a los dos lados de igual longitud se llaman **ángulos de la base** del triángulo isósceles.




Añade la definición de cada tipo de triángulo a tu lista de definiciones. Asegúrate de incluir un dibujo rotulado de cada definición.




# Cuadriláteros especiales

En esta lección

- Escribirás definiciones de tipos de cuadriláteros especiales

Todos los cuadriláteros en esta lección se pueden hacer uniendo dos triángulos congruentes por un lado equivalente. Dependiendo del tipo de triángulos que unes, los cuadriláteros tienen distintas propiendes. En la siguiente investigación definirás distintos tipos de cuadriláteros especiales en base a las relaciones de sus lados y ángulos.

## Investigación: cuadriláteros especiales

En la página 64 de tu libro, observa las figuras que son trapecios y las figuras que no son trapecios. ¿Qué es lo que diferencia a las figuras que son trapecios de las que no son trapecios? Cada trapecio es una figura con un par de lados paralelos. Por lo tanto, podrías comenzar con esta definición.

Un **trapecio** es una figura que tiene un par de lados paralelos.

Sin embargo, dos de las figuras del grupo de "no trapecios" también tienen un par de lados paralelos. Una de estas figuras tiene dos pares de lados paralelos, mientras que todos los trapecios sólo tienen un par. De manera que podrías refinar la definición de la siguiente manera.

Un **trapecio** es una figura que tiene exactamente un par de lados paralelos.

Esta definición es mejor, pero una figure no trapecio la satisface. Observa, sin embargo, que este no trapecio tiene cinco lados, mientras que cada trapecio tiene cuatro lados. Puedes perfeccionar la definición una vez más.

Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene exactamente un par de lados paralelos.

Esta definición se ajusta a todos los trapecios y a ninguno de los no trapecios.

Ahora escribe definiciones para los dos siguientes términos, **papalote** y **paralelogramo.** Observa que estas figuras tienen algunas cosas en común, pero también hay importantes diferencias entre ellas. Asegúrate de que tus definiciones tomen en cuenta estas diferencias.

Prosigue escribiendo definiciones para **rombo, rectángulo** y **cuadrado.** Existen varias definiciones correctas para cada uno de estos términos. Una vez que definas un término, puedes usarlo en la definición de otro término. Por ejemplo, un rombo es un tipo especial de paralelogramo, de manera que tu definición podría formularse de esta forma.

**(continúa)**

Un **rombo** es un paralelogramo con __________________.

Un cuadrado es un tipo especial de rombo *y* un tipo especial de rectángulo, así que tu definición podría formularse de alguna de las siguientes formas.

Un **cuadrado** es un rombo con __________________.

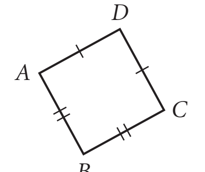
Un **cuadrado** es un rectángulo con __________________.

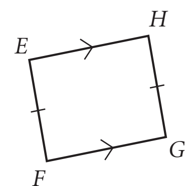
Ésta es otra posible definición.

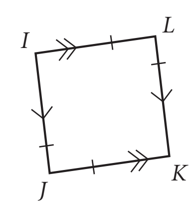
Un **cuadrado** es un rombo que también es un rectángulo.

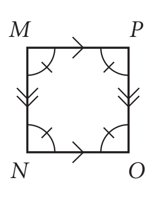
Añade las definiciones de todos los términos nuevos de esta lección a tu lista de definiciones. Asegúrate de incluir un dibujo con cada nueva definición.

***EJEMPLO*** Observa atentamente los cuadriláteros. Clasifica cada figura como trapecio, papalote, rombo, rectángulo o cuadrado. Explica tu razonamiento.




► ***Solución*** El cuadrilátero *ABCD* es un papalote porque dos pares de lados adyacentes son congruentes. El cuadrilátero *EFGH* es un trapecio porque sólo tiene un par de lados paralelos. El cuadrilátero *IJKL* es un rombo porque es un paralelogramo y todos sus lados tienen igual longitud. El cuadrilátero *MNOP* es un rectángulo porque es un paralelogramo y todos sus ángulos tienen iguales medidas.

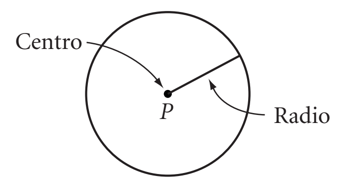



# Círculos

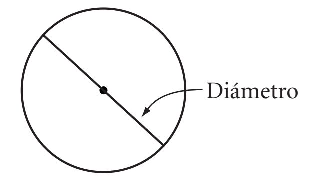
En esta lección

- Aprenderás la definición de **círculo**
- Escribirás definiciones para **cuerda, diámetro** y **tangente**
- Conocerás tres tipos de **arcos** y cómo se miden

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos en un plano, situados a una distancia determinada de un punto dado. La distancia dada se llama **radio** y el punto dado se llama **centro.** La palabra *radio* también se usa para referirse a un segmento que va del centro a un punto en el círculo. Al círculo se le designa según su centro. El círculo siguiente es el círculo *P*.




El **diámetro** de un círculo es un segmento de recta que contiene el centro, y cuyos extremos están sobre el círculo. La palabra *diámetro* también se usa para referirse a la longitud de este segmento.




## Investigación: Definición de términos asociados con círculos

En esta investigación escribirás definiciones para términos asociados con círculos.

de tu libro, revisa los ejemplos de cuerdas y no cuerdas. ¿Qué tienen en común las cuerdas? ¿Qué características tienen las cuerdas que no tienen las no cuerdas? Por ejemplo, todas las cuerdas son segmentos, y cada cuerda tiene dos puntos sobre el círculo. Una de las no cuerdas, a saber $\overline{RS}$, también tiene estas propiedades. Sin embargo, cada cuerda tiene *ambos extremos* sobre el círculo, mientras que $\overline{RS}$ sólo tiene uno de sus extremos sobre el círculo. Usando estas observaciones, podrías escribir esta definición.

> Una **cuerda** de un círculo es un segmento cuyos dos extremos están sobre el círculo.

Ahora, estudia los ejemplos de diámetros y no diámetros. Usa tus observaciones para escribir una definición para *diámetro*. Como ya definiste *cuerda*, puedes usar este término en tu definición. Tu definición puede formularse en una de las siguientes formas.

> Un **diámetro** de un círculo es un segmento que ___________________.
> Un **diámetro** de un círculo es una cuerda que ___________________.

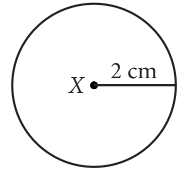
Finalmente, estudia los ejemplos de tangentes y no tangentes, y usa tus observaciones para definir **tangente.** Asegúrate de verificar tu definición buscando

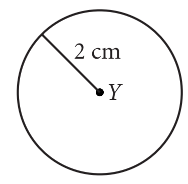
**(continúa)**

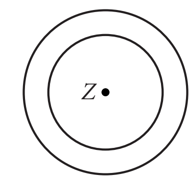
un contraejemplo. Observa que el punto en el que la tangente toca el círculo se denomina el **punto de tangencia.**

Lee las preguntas que aparecen en los Pasos 2 y 3 de tu libro. Asegúrate de que puedes responderlas. Piensa en las definiciones que escribiste en el Paso 1 y en qué forma son similares y distintas.

Los **círculos congruentes** son círculos con el mismo radio. Los **círculos concéntricos** son círculos en el mismo plano con el mismo centro.



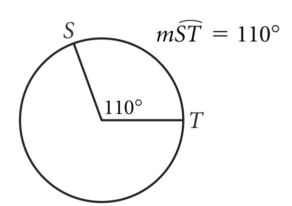




Círculos congruentes

Círculos concéntricos

El **arco de un círculo** está formado por dos puntos en el círculo y la parte continua (no fragmentada) del círculo entre esos dos puntos. Los arcos pueden clasificarse en tres tipos. Un **semicírculo** es un arco de un círculo cuyos extremos están sobre un diámetro. Un **arco menor** es un arco que es más pequeño que un semicírculo. Un **arco mayor** es un arco que es más grande que un semicírculo. Se designa a un arco menor con las letras de sus extremos. Se designa a los semicírculos y a los arcos mayores con las letras de tres puntos: la primera y la última letras son los extremos, y la letra de en medio es cualquier otro punto en el arco. Hay ejemplos de cada tipo de arco en el diagrama de la página 71 de tu libro.

Los arcos se miden en grados. Un círculo completo tiene una medida de arco de 360°, un semicírculo tiene una medida de arco de 180°, etcetera. La medida de un arco menor es igual a la medida del *ángulo central* asociado con el arco. El **ángulo central** es el ángulo cuyo vértice es el centro del círculo y cuyos lados pasan por los extremos del arco.




Añade las definiciones de todos los términos nuevos de esta lección a tu lista de definiciones. Asegúrate de incluir un dibujo rotulado con cada definición.




# Geometría del espacio

En esta lección

- Aprenderás la definición matemática del **espacio**
- Aprenderás los nombres de objetos tridimensionales comunes y cómo dibujarlos
- Resolverás problemas que requieren que visualices objetos en el espacio

El trabajo que has hecho hasta ahora se ha relacionado con objetos en un solo plano. En esta lección será necesario que visualices objetos en tres dimensiones, o en el espacio. Lee lo referente al espacio en la página 75 de tu libro.

En geometría, es importante poder distinguir los objetos tridimensionales de los dibujos bidimensionales, y crear dibujos que representen objetos tridimensionales. En las páginas 75–77 de tu libro se muestran ejemplos de objetos tridimensionales comunes y se dan sugerencias para dibujar estos objetos. Lee atentamente ese texto y practica dibujando los objetos.

## Investigación: Geometría del espacio

En esta investigación es necesario que decidas si unas afirmaciones respecto a los objetos geométricos son ciertas o falsas. Puedes hacer dibujos o usar objetos físicos para ayudarte a visualizar cada proposición. Por ejemplo, puedes usar una hoja de papel para representar un plano y un lápiz para representar una recta. En cada caso, trata de encontrar un contraejemplo de la proposición. Si encuentras alguno, la proposición debe ser falsa. Si una proposición es falsa, haz un dibujo y explica por qué es falsa.

A continuación se muestran algunas sugerencias para visualizar las situaciones descritas en las afirmaciones. Trata de determinar por tu cuenta si cada proposición es cierta o falsa, antes de leer la sugerencia.

**1.** Para dos puntos cualquiera, hay exactamente una recta que puede trazarse pasando por ellos.

Dibuja dos puntos en una hoja de papel, y dibuja una recta que pase por ellos. ¿Hay alguna forma de dibujar otra línea recta que pase por los puntos? Recuerda que no estás limitado a la superficie del papel.

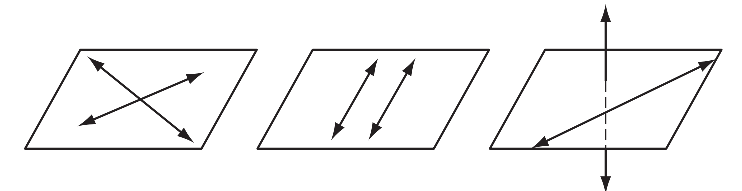
**2.** Para cualquier recta y un punto que no está sobre la recta, hay exactamente un plano que los contiene.

Dibuja un punto en una hoja de papel para representar el punto y usa un lápiz para representar la recta. Sostén el lápiz sobre el papel e imagina un plano que pase tanto por el punto como por la recta.

Sin mover el punto o la recta, trata de imaginar un plano distinto que pase por ellos. ¿Puedes hacerlo? Cambia la posición del lápiz y del papel, de manera que representen un punto y una recta diferentes. ¿Puedes imaginar más de un plano que pase por ellos? Experimenta hasta que consideres que sabes si la proposición es cierta o falsa.

(continúa)

**3.** Para dos rectas cualquiera, hay exactamente un plano que las contiene. Hay tres situaciones que debes considerar: rectas que se intersecan, rectas paralelas, y rectas oblicuas.



Primero, mira las rectas que se intersecan. Están trazadas en una hoja de papel, que puede representar un plano que contiene las rectas. Trata de imaginar un plano distinto que también contenga ambas rectas. ¿Puedes hacerlo?

Después, analiza las rectas paralelas en el plano de la hoja de papel. ¿Puede un plano diferente contener ambas rectas paralelas? Finalmente, observa el tercer par de rectas, que son rectas oblicuas, o rectas que no son paralelas y que no se interseca. ¿Puedes imaginar una hoja de papel que pueda contener estas rectas?

**4.** Si dos rectas coplanares son perpendiculares a una tercera recta en el mismo plano, entonces las dos rectas son paralelas.

Observa que todas las rectas mencionadas en esta proposición están en el mismo plano. Puedes usar una hoja de papel para representar el plano. En el papel, dibuja una recta y después otras dos rectas, cada una de las cuales es perpendicular a la recta inicial. ¿Son paralelas las dos rectas? Haz más dibujos si lo requieres.

**5.** Si dos planos no se intersecan, entonces son paralelos.

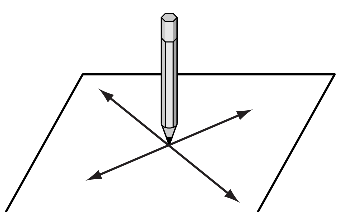
Usa dos hojas de papel o de cartulina para representar los planos. Es necesario que te imagines que las hojas se extienden indefinidamente. ¿Puedes colocar los planos de manera que nunca se intersequen, y que sin embargo *no* sean paralelos?

**6.** Si dos rectas no se intersecan, entonces son paralelas.

Tú sabes que si las rectas en el mismo plano no se intersecan, entonces deben ser paralelas. Pero, ¿qué sucede si las rectas están en planos distintos? Puedes usar dos lápices para representar dos rectas. Ve si puedes colocar las rectas de manera que no se intersequen y *no* sean paralelas.

**7.** Si una recta es perpendicular a dos rectas en un plano, pero la recta no está contenida en el plano, entonces la recta es perpendicular al plano.

Puedes usar una hoja de papel para representar el plano. Dibuja dos rectas en el papel para representar las dos rectas en el plano. La tercera recta no está contenida en el plano. Representa esta recta con un lápiz. Sostén el lápiz de manera que sea perpendicular a ambas rectas en el plano. (*Observación*: Para que puedas hacer esto, las rectas en el plano deben intersecarse.)



¿El lápiz es perpendicular al plano? Experimenta hasta que estés convencido de que la proposición es cierta o falsa.




# Una imagen vale más de mil palabras

En esta lección

- Resolverás problemas que requieren que pienses visualmente
- Dibujarás diagramas para ayudarte a resolver problemas

Cuando se te plantea un problema que requiere que visualices algo, con frecuencia es útil dibujar un diagrama. En los ejemplos de esta lección, aplicarás tus habilidades de visualización para resolver problemas. Trabaja con todos los ejemplos de tu libro, usando diagramas para ayudarte a encontrar las soluciones. A continuación se presentan algunos ejemplos adicionales. Intenta resolver cada problema antes de buscar la solución.

***EJEMPLO A*** Cinco amigas compitieron en una carrera ciclista de 50 millas. Sue llegó 25 minutos después que Ana. Ana llegó 40 minutos antes que Mel. Mel llegó 25 minutos después que Jing. Rosi llegó 20 minutos antes que Jing. Si Ana llegó a la 1:30 P.M., ¿a qué hora llegó cada una de las otras muchachas?

▶ ***Solución*** Puedes trazar la información, un hecho a la vez, en una "recta de tiempo".

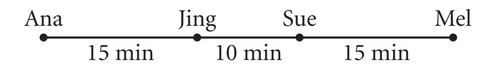
Sue llegó 25 minutos después que Ana.

Ana Sue
25 min

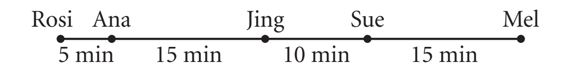
Ana llegó 40 minutos antes que Mel.




Mel llegó 25 minutos después que Jing.




Rosi llegó 20 minutos antes que Jing.




Usa el hecho de que Ana llegó a la 1:30 P.M., además de la información contenida en la recta de tiempo, para averiguar a qué hora llegó cada muchacha.

Rosi: 1:25 P.M. Jing: 1:45 P.M. Sue: 1:55 P.M. Mel: 2:10 P.M.

En el siguiente ejemplo, debes identificar un **lugar geométrico** (*locus*) de los puntos.

***EJEMPLO B*** La calle Oak y la calle Maple son perpendiculares entre sí. Maya y Chris están buscando a su perro. Maya está en la calle Oak, 50 metros al norte de la esquina de Oak y Maple. Chris está en la calle Maple, 70 metros al este de la esquina. El perro está a 60 metros de Maya y a 50 metros de Chris. Haz un diagrama que muestre los lugares en los que podría ubicarse el perro.

**(continúa)**

▶ ***Solución***

Comienza dibujando un diagrama que muestre las dos calles y las ubicaciones de Maya y Chris. Como el perro está a 60 metros de Maya, dibuja un círculo con un radio de 60 metros, centrado en el punto *M*. Como el perro está a 50 metros de Chris, dibuja un círculo con un radio de 50 metros, centrado en el punto *C*. La intersección de los círculos señala los dos lugares en los que podría estar el perro.

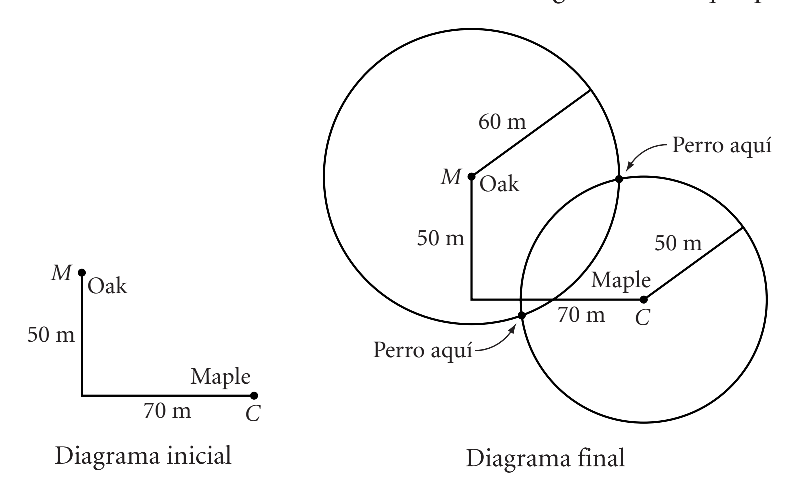



Diagrama inicial    Diagrama final

Un diagrama de Venn es un círculo (u óvalo) grande que contiene círculos (u óvalos) más pequeños. El círculo grande representa una colección entera de cosas, y los círculos más pequeños representan partes especiales (o subgrupos) de la colección entera.

***EJEMPLO C***

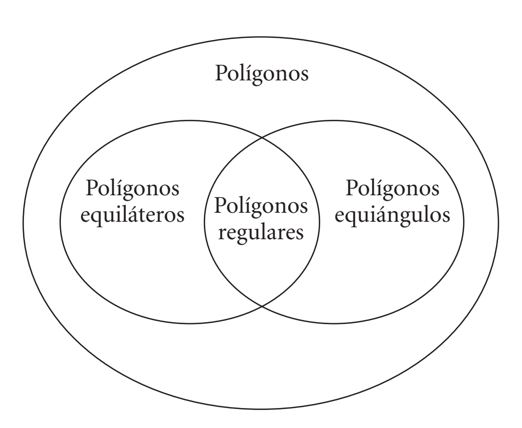
Crea un diagrama de Venn que muestre las relaciones entre polígonos, polígonos equiláteros, polígonos equiángulos y polígonos regulares.

▶ ***Solución***

El círculo grande en tu diagrama de Venn debe representar lo que tienen en común los polígonos, polígonos equiláteros, polígonos equiángulos y polígonos regulares. Estos son todos polígonos. Por lo tanto, el círculo exterior representa los polígonos.

Un polígono equilátero es un polígono especial cuyos lados tienen todos la misma longitud. Entonces, un círculo interno más pequeño puede representar los polígonos equiláteros.

Un polígono equiángulo es un polígono especial en el cual todos los ángulos tienen las mismas medidas. Entonces, un segundo círculo interno más pequeño puede representar los polígonos equiángulos.




La intersección de dos círculos internos representa los polígonos equiláteros y equiángulos. Ésta es la definición de un polígono regular.

El diagrama de Venn a la derecha puede representar visualmente las relaciones entre estas figuras.




# Razonamiento inductivo

En esta lección

- Aprenderás cómo se usa el **razonamiento inductivo** en la ciencia y en las matemáticas
- Usarás el razonamiento inductivo para hacer **conjeturas** respecto a sucesiones de números y formas

El **razonamiento inductivo** es el proceso de observar datos, reconocer patrones, y hacer generalizaciones basándose en esos patrones. Es probable que uses el razonamiento inductivo todo el tiempo sin darte cuenta de ello. Por ejemplo, supongamos que a tu profesora de historia le gusta hacer exámenes "sorpresa". Tú observas que, durante los primeros cuatro capítulos del libro, hizo un examen al día siguiente después de cubrir la tercera lección. Basándote en el patrón de tus observaciones, podrías generalizar que tendrás un examen después de la tercera lección de cada capítulo. Una generalización basada en el razonamiento inductivo se denomina **conjetura.**

El Ejemplo A de tu libro presenta un ejemplo de cómo se usa el razonamiento inductivo en la ciencia. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO A***

En la clase de física, el grupo de Dante soltó una pelota desde diferentes alturas y midió la altura del primer rebote. Registraron sus resultados en esta tabla.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Altura de la caída (cm)** | 120 | 100 | 160 | 40 | 200 | 80 |
| **Altura del primer rebote (cm)** | 90 | 74 | 122 | 30 | 152 | 59 |

Haz una conjetura basada en sus hallazgos. Después predice la altura del primer rebote para una caída de 280 cm.

▶ ***Solución***

Si divides cada altura del primer rebote entre la correspondiente altura de la caída, obtienes los siguientes resultados: 0.75, 0.74, 0.7625, 0.75, 0.76, 0.7375. Basándote en estos resultados, podrías hacer esta conjetura: "Para esta pelota, la altura del primer rebote siempre será de aproximadamente 75% de la altura de la caída".

Según esta conjetura, la altura del primer rebote para una altura de caída de 280 cm sería de aproximadamente $280 \cdot 0.75$, ó 210 cm.

En el Ejemplo B de tu libro se ilustra cómo puede usarse el razonamiento inductivo para hacer una conjetura sobre una secuencia de números. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO B***

Considera la secuencia

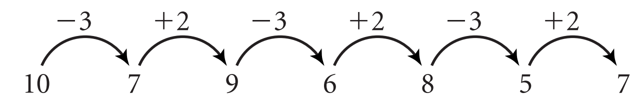
10, 7, 9, 6, 8, 5, 7, . . .

Formula una conjetura respecto a la regla para generar la secuencia. Después encuentra los siguientes tres términos.

**(continúa)**

► ***Solución***

Observa la forma en que los números cambian de término a término.




El primer término de la secuencia es 10. Le restas 3 para obtener el 2º término. Después le sumas 2 para obtener el 3er término. Continúas alternando entre restar 3 y sumar 2 para generar los términos restantes. Los siguientes tres términos son 4, 6 y 3.

En la investigación, buscarás un patrón en una secuencia de formas.

## Investigación: Cambiadores de formas

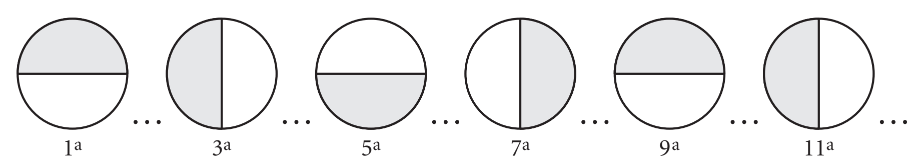
Observa la secuencia de formas en la investigación en tu libro. Completa cada paso de la investigación. A continuación se encuentran algunas sugerencias para cada paso, si así lo requieres.

**Paso 1** ¿Las formas son iguales o diferentes? ¿Cómo cambia la porción sombreada de una forma con número impar a la siguiente?

**Paso 2** En primer lugar, concéntrate en la forma del polígono. ¿El polígono cambia de una forma con número par a la siguiente? Si es así, ¿cómo cambia? En segundo lugar, concéntrate en los pequeños círculos que están dentro de la forma. ¿Cómo cambian estos círculos de una forma con número par a la siguiente?

**Paso 3** La siguiente forma es la 7ª forma. Como es una forma con número impar, usa los patrones que describiste en el Paso 1 para descifrar cómo se verá. La 8ª forma es una forma con número par, de manera que debe seguir los patrones que describiste en el Paso 2.

**Paso 4** Observa que las formas con números impares pasan por un ciclo que se repite cada ocho términos. Así pues, por ejemplo, las formas 1ª, 9ª, y 17ª se ven iguales; las formas 3ª, 11ª, y 19ª se ven iguales, y así sucesivamente. Usa esta idea para averiguar cómo se vería la forma 25ª.




**Paso 5** ¿Cuántos lados tiene la 2ª forma? ¿La 4ª? ¿La 6ª? ¿La enésima? ¿Cuántos lados tendrá la 30ª forma? ¿Cómo se ordenarán los puntos en la 30ª forma?

Lee el texto que sigue la investigación en tu libro.




# Encontrar el enésimo término

En esta lección

- Aprenderás cómo escribir **reglas de funciones** para secuencias de números que tengan una diferencia constante
- Escribirás una regla que describa un patrón geométrico
- Comprenderás por qué una regla relacionada a una secuencia con una diferencia constante se denomina **función lineal**

Considera la secuencia 20, 27, 34, 41, 48, 55, 62, . . . . Observa que la diferencia entre dos términos consecutivos cualesquiera es 7. Decimos que esta secuencia tiene una *diferencia constante* de 7. Para encontrar los siguientes dos términos de la secuencia, podrías sumarle 7 al último término para obtener 69, y después sumarle 7 a 69 para obtener 76. Pero, ¿qué habría que hacer para encontrar el término número 200? Tomaría mucho tiempo enumerar todos los términos. Si pudieras encontrar una regla para calcular el enésimo término de la secuencia para cualquier número $n$, podrías encontrar el término número 200 sin tener que enumerar todos los términos anteriores. Esta regla se denomina la **regla de la función.** En esta investigación aprenderás un método para escribir una regla para cualquier secuencia que tenga una diferencia constante.

## Investigación: Encontrar la regla

Copia y completa cada tabla del Paso 1 de la investigación. Después encuentra la diferencia entre valores consecutivos. Si la diferencia es constante, busca una relación entre la diferencia y la regla.

He aquí la tabla completa para la parte c. Observa que los valores tienen una diferencia constante de $-2$, que es igual al coeficiente de $n$ en la regla $-2n + 5$.

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2n + 5$ | 3 | 1 | $-1$ | $-3$ | $-5$ | $-7$ | $-9$ | $-11$ |

$-2$ $-2$ $-2$ $-2$ $-2$ $-2$ $-2$

Para cada tabla debes haber encontrado una diferencia constante y haber observado que la diferencia constante es igual al coeficiente de $n$ en la regla. Si no es así, regresa y verifica tu trabajo. En general, si la diferencia entre los términos consecutivos de una secuencia es un valor constante $a$, entonces el coeficiente de $n$ en la regla es $a$.

Ahora, regresemos a la secuencia 20, 27, 34, 41, 48, 55, 62, . . . del principio de la lección. Puedes organizar los términos en una tabla.

| Término $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | . . . | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valor $f(n)$ | 20 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 | . . . | |

(continúa)

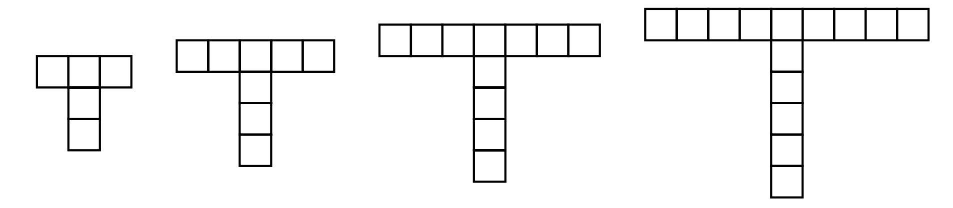
La diferencia constante para esta secuencia es 7, de manera que sabes que una parte de la regla es $7n$. El valor del primer término ($n = 1$) de la secuencia es 20. Sustituir $n$ por 1 en $7n$, da como resultado $7(1) = 7$. Para obtener 20, debes sumar 13. Por lo tanto, la regla es $7n + 13$.

Verifica esta regla probándola para otros términos de la secuencia. Por ejemplo, cuando $n = 4$, $7n + 13 = 28 + 13 = 41$, que es el 4º término de la secuencia.

Puedes usar la regla para encontrar el 200º término de la secuencia. El término número 200 es $7(200) + 13$ ó 1413.

Para obtener más práctica en la escritura de reglas para patrones, trabaja con los Ejemplos A y B de tu libro. A continuación se encuentra otro ejemplo.

***EJEMPLO*** Si el patrón de las formas T continúa, ¿cuántos cuadros habrá en la 100ª forma T?



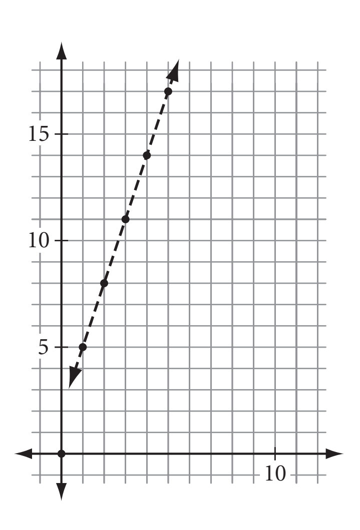
***Solución*** Haz una tabla que muestre el número de cuadrados que hay en cada una de las formas T mostradas.

| **Forma T** | 1 | 2 | 3 | 4 | . . . | $n$ | . . . | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de cuadrados** | 5 | 8 | 11 | 14 | . . . | | . . . | |

Ahora trata de encontrar una regla para el número de cuadrados en la enésima forma T. Como la diferencia constante es 3, la regla tiene la forma $3n + c$. Como el número de cuadrados en la primera forma ($n = 1$) es 5, $c = 2$. La regla es $3n + 2$. Por lo tanto, hay $3(100) + 2$, ó 302, cuadrados en la 100ª forma T.

En el ejemplo de la forma T, el proceso de observar patrones y generalizar una regla para la enésima forma es un razonamiento inductivo. La regla hallada en este ejemplo se llama **función linear.** Una función linear es una regla que genera una secuencia con una diferencia constante.

Para ver por qué la regla en el ejemplo con forma T es una función linear, puedes graficar el valor de la secuencia como pares ordenados de la forma (*número de término, valor*) en el plano de coordenadas. Los puntos de tu gráfica serán colineares, porque cada vez que el número de término aumenta en 1, el valor aumenta por una diferencia constante de 3. La recta $y = 3x + 2$ pasa por los puntos.



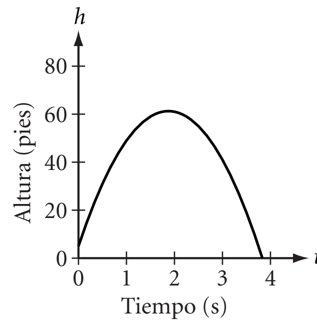



# Modelos matemáticos

En esta lección

- Intentarás resolver un problema por **representarlo**
- Crearás un **modelo matemático** para un problema
- Conocerás los **números triangulares** y la fórmula para generarlos

Cuando representas una situación con una gráfica, un diagrama, o una ecuación, estás creando un **modelo matemático.** Supongamos que lanzas una pelota verticalmente al aire con una velocidad inicial de 60 pies/s. Tal vez recuerdes, del álgebra, que si lanzas la pelota desde una altura de 5 pies, entonces la altura $h$ de la pelota después de $t$ segundos puede modelarse con la ecuación y la gráfica que a parece a la derecha. Una vez que has creado un modelo, puedes usarlo para hacer predicciones. Por ejemplo, podrías usar la ecuación o gráfica para predecir la altura de la pelota después de 2 segundos, o para predecir cuándo golpeará el piso.




$h = -16t^2 + 60t + 5$

En la investigación resolverás un problema creando modelos matemáticos.

## Investigación: Apretones de manos en una fiesta

Si cada una de las 30 personas que están en una fiesta se saludó de mano con todos los demás, ¿cuántos apretones de manos hubo?

Si puedes reunir un grupo de cuatro personas, representa el problema para "fiestas" de uno, dos, tres, y cuatro personas y anota tus resultados en una tabla. Tu tabla debe verse así.

| **Personas** | 1 | 2 | 3 | 4 | . . . | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Apretones de manos** | 0 | 1 | 3 | 6 | . . . | |

¿Puedes generalizar a partir de tu tabla para encontrar el número de apretones de manos para 30 personas? Sin duda, te ayudaría contar con más datos. Sin embargo, no es muy práctico reunir muchas personas para representar el problema. En su lugar, podrías intentar usar un modelo matemático.

Modela el problema usando puntos para representar a las personas y segmentos de recta que conecten los puntos para representar los apretones de manos.

1 persona
0 apretones
de manos

2 personas
1 apretón
de manos

3 personas
3 apretones
de manos

4 personas
6 apretones
de manos

Anota tus resultados en una tabla. Esta tabla da los resultados hasta para seis personas, pero tal vez desees encontrar los resultados para grupos más grandes, para ayudarte a encontrar un patrón.

| **Número de puntos (personas)** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | . . . | $n$ | . . . | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de segmentos (apretones de manos)** | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | . . . | | . . . | |

1 2 3 4 5

Observa que el patrón no tiene una diferencia constante, así que la regla no es una función lineal.

**(continúa)**

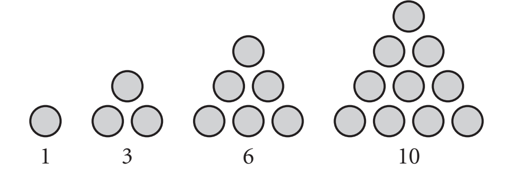
Lee el diálogo entre Erin y Stephanie en tu libro. De acuerdo con la línea de razonamiento de Erin y Stephanie, el diagrama que tiene 5 puntos debería tener 4 segmentos por punto, de manera que el número total de segmentos debería ser $\frac{5 \cdot 4}{2}$ ó 10. Esto concuerda con los datos de la tabla.

Copia y completa la tabla en el Paso 6 de tu libro. Asegúrate de que puedes responder a estas preguntas sobre las expresiones para el número de apretones de manos.

- ¿Qué representa el mayor de los dos factores en cada numerador?
- ¿Qué representa el factor menor?
- ¿Por qué se divide entre 2 el producto de los factores?

Debes encontrar que la regla $\frac{n(n-1)}{2}$ modela el número de apretones de manos para un grupo de $n$ personas. Entonces, para 30 personas, habría $\frac{30 \cdot 29}{2}$, ó 435, apretones de manos.

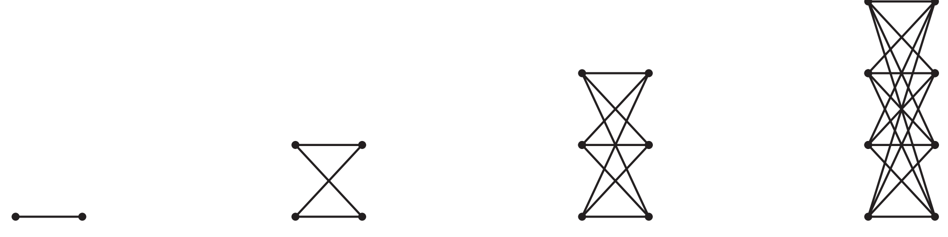
Los números del patrón de la investigación se denominan **números triangulares,** porque puedes representarlos con un patrón triangular de puntos.




En tu libro, lee el texto que sigue la investigación, que muestra cómo puedes derivar una fórmula para los números triangulares usando los **números rectangulares.** Como se esperaba, la fórmula es la misma que encontraste en la investigación. He aquí otro ejemplo de un problema de apretones de manos.

***EJEMPLO*** Antes de un partido de fútbol, cada uno de los 11 jugadores de un equipo estrechó la mano a cada jugador del otro equipo. ¿Cuántos apretones de manos hubo?

▶ ***Solución*** Dibuja diagramas para representar esta situación para equipos de uno, dos, tres, y cuatro jugadores, y anota los resultados en una tabla. (Recuerda que los jugadores *no* estrechan la mano a los miembros de su propio equipo.)



Equipos de 1 persona
1 apretón de manos

Equipos de 2 personas
4 apretones de manos

Equipos de 3 personas
9 apretones de manos

Equipos de 4 personas
16 apretones de manos

| **Jugadores por equipo** | 1 | 2 | 3 | 4 | . . . | $n$ | . . . | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Número de apretones de manos** | 1 | 4 | 9 | 16 | . . . | | . . . | |

¿Distingues un patrón? En cada caso, el número de apretones de manos es el cuadrado del número de personas de cada equipo. La regla para el número de apretones de manos entre dos equipos de $n$ jugadores es $n^2$. Así pues, para los equipos de fútbol de 11 jugadores, hubo $11^2$, ó 121, apretones de manos.




# Razonamiento deductivo

En esta lección

- Conocerás el **razonamiento deductivo**
- Usarás el razonamiento deductivo para justificar los pasos en la solución de una ecuación
- Usarás un argumento deductivo para explicar por qué una conjetura geométrica es cierta

En las Lecciónes 2.1–2.3, usaste el razonamiento inductivo para hacer conjeturas basándote en patrones observados. Para explicar *por qué* es cierta una conjetura, necesitas usar el razonamiento *deductivo*. El **razonamiento deductivo** es el proceso de mostrar que ciertas afirmaciones son los resultados lógicos de hechos aceptados. Lee lo referente al razonamiento deductivo en la página 114 de tu libro.

Cuando justificas cada paso del proceso de resolver una ecuación, estás usando el razonamiento deductivo. El Ejemplo A de tu libro muestra los pasos para la solución de una ecuación algebraica específica. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO***

Resuelve la ecuación para $x$. Justifica cada paso del proceso de la solución.

$$5x^2 + 19x - 45 = 5x(x + 2)$$

► ***Solución***

| | |
|---|---|
| $5x^2 + 19x - 45 = 5x(x + 2)$ | La ecuación original. |
| $5x^2 + 19x - 45 = 5x^2 + 10x$ | Distribuye. |
| $19x - 45 = 10x$ | Resta $5x^2$ de ambos lados. |
| $-45 = -9x$ | Resta $19x$ de ambos lados. |
| $5 = x$ | Divide ambos lados entre –9. |

Lee atentamente el Ejemplo B de tu libro. Allí se muestran tres ejemplos de una semirrecta que biseca a un ángulo obtuso. En cada caso, los dos ángulos congruentes recién formados son agudos. A partir de estos ejemplos se usa el *razonamiento inductivo* para formar la siguiente conjetura.

Si se biseca un ángulo obtuso, entonces los dos ángulos congruentes recién formados son agudos.

Una vez que se establece la conjetura, se usa el *razonamiento deductivo* para mostrar que es cierta. Observa que al usar una variable, *m*, para representar la medida de un ángulo obtuso, el argumento muestra que la conjetura es cierta para *cualquier* ángulo obtuso. Como otro ejemplo del uso de un argumento deductivo para explicar por qué una conjetura es cierta, piensa en los tres ángulos obtusos en el Ejemplo B de tu libro con su bisectriz, $\overrightarrow{AC}$. Esta vez haz una conjetura que diga la medida mínima de un ángulo para cada uno de los nuevos ángulos congruentes formados. Observando nuevamente estas medidas de los nuevos ángulos—60°, 79° y 46°—notarás que cada uno es mayor que 45°. Entonces, una conjetura posible es la que se menciona aquí.

**(continúa)**

**Conjetura:** Si un ángulo obtuso se biseca, entonces los dos nuevos ángulos congruentes que se forman tienen medidas mayores que 45°.

Completa el siguiente argumento deductivo para demostrar que esta conjetura es cierta.

**Argumento deductivo:** Haz de cuenta que $a$ es la medida de un ángulo obtuso.

$$a > \underline{\qquad\qquad}$$

Cuando un ángulo se biseca, los nuevos ángulos que se forman miden cada uno la mitad del ángulo original.

$$\frac{1}{2}a > \underline{\qquad\qquad}$$

Entonces, los nuevos ángulos congruentes tienen medidas mayores que 45°.

En esta investigación usarás el razonamiento inductivo para formar una conjetura y el razonamiento deductivo para explicar por qué es cierta.

## Investigación: Segmentos traslapados

Observa los dos diagramas al principio de la investigación. En cada diagrama, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Para cada diagrama, encuentra las longitudes de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. ¿Qué observas? Debes encontrar que en cada caso $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Dibuja tu propio segmento $AD$. Sitúa los puntos $B$ y $C$ sobre el segmento, para que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $B$ esté más cerca del punto $A$ que del punto $D$. Mide $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Debes encontrar que, como en los diagramas de la investigación, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Usa tus hallazgos para completar la conjetura que se inicia en el libro en el Paso 4. Tu conjetura completa debe ser similar a la siguiente.

> Si $\overline{AD}$ tiene los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$, en ese orden, y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, entonces los segmentos traslapados $AC$ y $BD$ son congruentes (esto es, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$).

Esta conjetura se conoce como la propiedad de los segmentos traslapados. Ahora escribe un argumento deductivo para explicar por qué la conjetura es cierta. (Sugerencia: Usa los hechos de que $\overline{BC}$ es una parte tanto de $\overline{AC}$ como de $\overline{BD}$, y que las otras partes de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$—a saber, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$—son congruentes.) Después de intentar escribir tu propio argumento deductivo compáralo con el de abajo.

**Argumento deductivo:** Como $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, sabes que

$$AB = CD$$

Puedes sumar la misma cosa a ambos lados de una ecuación y la ecuación permanecerá cierta.

$$AB + BC = BC + CD$$

Usando la suma de segmentos,

$$AB + BC = AC \text{ y } BC + CD = BD$$

Sustituyendo $AB + BC$ con $AC$ y $BC + CD$ con $BD$ en la ecuación anterior, obtienes:

$$AC = BD$$

Según la definición de segmentos congruentes, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Lee el texto a continuación de la investigación en tu libro.




# Relaciones de ángulos

En esta lección

- Formularás una conjetura respecto a los ángulos que forman un **par lineal**
- Formularás y probarás una conjetura respecto a los pares de **ángulos opuestos por el vértice**
- Escribirás el **recíproco** de una proposición "si-entonces" y determinarás si es cierta

En esta lección usarás el razonamiento inductivo para descubrir algunas relaciones geométricas que implican ángulos.

## Investigación 1: La conjetura del par lineal

Repite el Paso 1 de la Investigación 1 tres veces, creando tres diferentes pares de ángulos lineales.

Debes encontrar que para cada par de ángulos lineales, la suma de las medidas de los ángulos es 180°. Este descubrimiento conduce a la siguiente conjetura.

**Conjetura del par lineal** Si dos ángulos forman un par lineal, entonces las medidas de los ángulos suman 180°. **C-1**

Mantén una lista de conjeturas importantes en tu cuaderno. Haz un dibujo por cada conjetura. La conjetura del par lineal (C-1) debe ser el primer elemento de tu lista.

## Investigación 2: La conjetura de los ángulos opuestos por el vértice

Sigue los Pasos 1–3 de tu libro. Debes encontrar que los ángulos opuestos por el vértice (*vertical angles*) son congruentes. Esto es, $\angle 1 \cong \angle 3$ y $\angle 2 \cong \angle 4$.

Ahora dibuja en *patty paper* (papel semitransparente) un par distinto de rectas que se intersecan y repite el Paso 2 y 3. ¿Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes?

Completa la conjetura usando tu trabajo en esta investigación.

**Conjetura de los ángulos opuestos por el vértice** Si dos ángulos son ángulos opuestos por el vértice, entonces son _________________. **C-2**

Usaste el razonamiento inductivo para descubrir la conjetura del par lineal y la conjetura de los ángulos opuestos por el vértice. El ejemplo en tu libro muestra que, si aceptas que la conjetura del par lineal es cierta, entonces puedes usar el razonamiento deductivo para mostrar que la conjetura de los ángulos opuestos por el vértice también debe ser cierta. Lee el ejemplo detalladamente y asegúrate de comprender cada paso del argumento deductivo.

(continúa)

Aquí hay otro ejemplo que te servirá de ayuda para escribir argumentos deductivos.

***EJEMPLO***

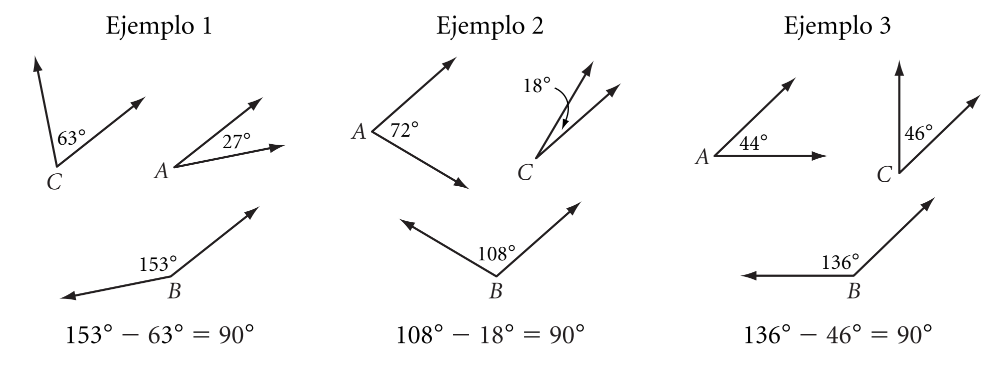
**a.** Usa el razonamiento inductivo para completar esta conjetura.

Si $\angle B$ es el suplemento de un ángulo agudo $A$ y $\angle C$ es el complemento de $\angle A$, entonces $m\angle B - m\angle C =$ _____.

**b.** Escribe un argumento deductivo para demostrar por qué la conjetura es cierta.

▶ ***Solución***

**a.** Los diagramas siguientes muestran tres ejemplos.




$153° - 63° = 90°$ $108° - 18° = 90°$ $136° - 46° = 90°$

En cada caso, $m\angle B - m\angle C = 90°$. Basándose en estos ejemplos, la conjetura sería

Si $\angle B$ es el suplemento de un ángulo agudo $A$ y $\angle C$ es el complemento de $\angle A$, entonces $m\angle B - m\angle C = 90°$.

**Argumento deductivo:** Las medidas de los ángulos suplementarios suman 180°.

$$m\angle A + m\angle B = 180°$$

Las medidas de los ángulos complementarios suman 90°.

$$m\angle A + m\angle C = 90°$$

Resuelve la segunda ecuación para $m\angle A$.

$$m\angle A = 90° - m\angle C$$

Sustituye $90° - m\angle C$ con $m\angle A$ en la primera ecuación.

$$90° - m\angle C + m\angle B = 180°$$

Resta 90° de ambos lados de la ecuación.

$$-m\angle C + m\angle B = 90°$$

Reescribe el lado izquierdo de la ecuación para completar el argumento deductivo.

$$m\angle B - m\angle C = 90°$$

La conjetura de los ángulos opuestos por el vértice establece que *si* dos ángulos son ángulos opuestos por el vértice, *entonces* son congruentes. Cuando inviertes las partes "si" y "entonces" de una proposición "si-entonces", obtienes el **recíproco** (*converse*) de la proposición. He aquí el recíproco de la conjetura de los ángulos opuestos por el vértice.

*Si* dos ángulos son congruentes, *entonces* son ángulos opuestos por el vértice.

¿Es cierta esta proposición? El diagrama en la página 124 de tu libro muestra un *contraejemplo* de esta proposición. Si puedes encontrar aunque sea un solo contraejemplo, entonces la proposición es falsa. Así pues, el recíproco de la conjetura de los ángulos opuestos por el vértice es falso.




# Ángulos especiales sobre rectas paralelas

En esta lección

- Formularás tres conjeturas respecto a los ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son intersecadas por una **transversal**
- Determinarás si el recíproco de cada conjetura es cierto
- Probarás una de las conjeturas, suponiendo que una de las otras conjeturas es cierta

Una recta que interseca dos o más rectas coplanares se denomina **transversal.** Lee en tu libro lo referente a los tres tipos de pares de ángulos que se forman cuando una transversal interseca a dos rectas. En la investigación observarás los ángulos formados cuando una transversal interseca a dos rectas *paralelas*.

## Investigación 1: ¿Cuáles ángulos son congruentes?

Sigue las instrucciones que preceden el Paso 1 para crear las rectas paralelas $k$ y $\ell$, intersecadas por la transversal $m$. Numera los ángulos como se muestra.

Coloca una hoja de *patty paper* sobre el conjunto de ángulos 1, 2, 3 y 4. Copia las dos rectas de intersección $m$ y $k$ y los cuatro ángulos en el *patty paper*.

Los ángulos 1 y 5 son ángulos correspondientes. Coloca el trazado de $\angle 1$ sobre $\angle 5$. ¿Cómo se comparan los ángulos? Repite este proceso para los otros pares de ángulos correspondientes ($\angle 3$ y $\angle 7$, $\angle 2$ y $\angle 6$, $\angle 4$ y $\angle 8$). Usa tus hallazgos para completar esta conjetura.

**Conjetura de los ángulos correspondientes (abreviada conjetura CA)** **C-3a**
Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son ________________.

Los ángulos 3 y 6 son ángulos alternos internos. Coloca el trazado de $\angle 3$ sobre $\angle 6$. ¿Cómo se comparan los ángulos? Repite este proceso para el otro par de ángulos alternos internos ($\angle 4$ y $\angle 5$), y después completa esta conjetura.

**Conjetura de los ángulos alternos internos (abreviada conjetura AIA)** **C-3b**
Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son ________________.

Los ángulos 1 y 8 son ángulos alternos externos. Coloca el trazado de $\angle 1$ sobre $\angle 8$. ¿Cómo se comparan los ángulos? Repite este proceso para el otro par de ángulos alternos externos ($\angle 2$ y $\angle 7$), y después completa esta conjetura.

**Conjetura de los ángulos alternos externos (abreviada conjetura AEA)** **C-3c**
Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos externos son ________________.

Las tres conjeturas anteriores pueden combinarse para crear la conjetura de las rectas paralelas.

**(continúa)**

**C-3**

**Conjetura de las rectas paralelas** Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son _______________, los ángulos alternos internos son _________________, y los ángulos alternos externos son _________________.

Ahora dibuja dos rectas que *no* sean paralelas y una transversal que corte ambas rectas. Usa el mismo proceso que usaste antes para comparar los ángulos correspondientes, los ángulos alternos internos, y los ángulos alternos externos. ¿Funcionan las conjeturas para rectas no paralelas?

## Investigación 2: ¿Es cierto el recíproco?

En esta investigación considerarás el recíproco de la conjetura de los ángulos correspondientes: Si dos rectas son cortadas por una transversal para formar un par de ángulos correspondientes congruentes, entonces las rectas son paralelas. ¿Crees que esta proposición es cierta? Investiga siguiendo el Paso 1 de tu libro.

Ahora escribe el recíproco de cada una de las dos otras conjeturas. ¿Crees que los recíprocos son ciertos? Investiga siguiendo el Paso 2 de tu libro. Después completa la siguiente conjetura.

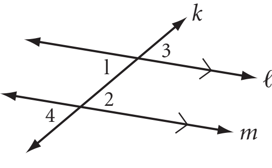
**C-4**

**Recíproco de la conjetura de las rectas paralelas** Si dos rectas son cortadas por una transversal para formar un par de ángulos correspondientes congruentes, ángulos alternos internos congruentes, o ángulos alternos externos congruentes, entonces las rectas son _________________.

Si aceptas como cierta cualquiera de las tres conjeturas de rectas paralelas, puedes usar el razonamiento deductivo (y posiblemente alguna de las conjecturas anteriores) para mostrar que las otras también son ciertas. El ejemplo de tu libro muestra que si aceptas las conjeturas de los ángulos opuestos por el vértice y de los ángulos correspondientes, entonces puedes probar que la conjetura de los ángulos alternos internos es cierta. Lee atentamente el ejemplo. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO***

Supongamos como cierta la conjetura de los ángulos alternos internos. Escribe un argumento deductivo que demuestre que la conjetura de los ángulos alternos externos debe ser cierta. (Puedes suponer que la conjetura de los ángulos opuestos por el vértice es cierta.)




▶ ***Solución***

**Argumento deductivo:** En el diagrama, las rectas $\ell$ y $m$ son paralelas y están intersecadas por la transversal $k$. Como suponemos que los ángulos alternos internos son congruentes

$$m\angle 1 = m\angle 2$$

Como suponemos que la conjetura de los ángulos opuestos por el vértice es cierta

$$m\angle 1 = m\angle 3 \text{ y } m\angle 2 = m\angle 4$$

Sustituye $m\angle 1$ con $m\angle 3$ y $m\angle 2$ con $m\angle 4$ en la primera ecuación.

$$m\angle 3 = m\angle 4$$

Entonces los ángulos alternos externos, $\angle 3$ y $\angle 4$, son congruentes.

Por lo tanto, si los ángulos alternos internos son congruentes, entonces los ángulos alternos externos también son congruentes.




# Duplicación de segmentos y ángulos

En esta lección

- Aprenderás lo que significa crear una **construcción geométrica**
- **Duplicarás un segmento** usando una regla no graduada y un compás y usando *patty paper* y una regla no graduada
- **Duplicarás un ángulo** usando una regla no graduada y compás y usando *patty paper* y una regla no graduada

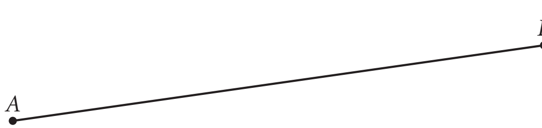
En geometría, existen varios métodos para crear una figura.

- Puedes *trazar* una figura sin usar herramientas de geometría. Traza una figura cuando no son importantes las medidas exactas.
- Puedes *dibujar* una figura usando herramientas de medición, tales como un transportador y una regla. Dibuja una figura cuando sí es importante que las longitudes y las medidas de los ángulos sean precisas.
- Puedes *construir* una figura usando un compás y una regla no graduada. Cuando hagas una construcción, *no* uses tus herramientas de medición. Las construcciones con compás y regla no graduada te permiten dibujar ángulos y segmentos congruentes, bisectrices de ángulos y segmentos, y rectas paralelas y perpendiculares.
- También puedes *construir* una figura usando *patty paper* y una regla no graduada. Como sucede con las construcciones hechas con compás y regla no graduada, las construcciones con *patty paper* no usan herramientas de medición.

En esta lección te concentrarás en las construcciones. Puedes leer sobre la historia de las construcciones en la introducción de la lección de tu libro.

### Investigación 1: Duplicación de un segmento

En esta investigación copiarás este segmento usando sólo un compás y una regla no graduada. Esto se llama *duplicación* de un segmento. Cuando construyes una figura, puedes usar una regla para trazar segmentos, pero *no* para medir.




En tu papel, dibuja una semirrecta más larga que $\overline{AB}$. Rotula el extremo de la semirrecta con la letra *C*. Ahora piensa cómo puedes usar *solamente* tu compás para crear un segmento, $\overline{CD}$, que tenga la misma longitud que $\overline{AB}$. Trata de construir $\overline{CD}$ por tu cuenta, antes de consultar el Paso 1 de la investigación en tu libro. Puedes usar una regla graduada para verificar que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

El Paso 1 muestra las tres etapas del proceso de la duplicación del segmento *AB*. Las etapas se describen a continuación.

**Etapa 1:** Dibuja una semirrecta más larga que $\overline{AB}$ y rotula el extremo con la letra *C*.

**Etapa 2:** Coloca la punta de tu compás en el punto *A*. Abre el compás hasta que el otro extremo toque el punto *B*, y traza un arco.

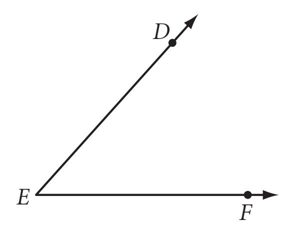
**(continúa)**

**Etapa 3:** *Sin cambiar la apertura de tu compás,* coloca la punta de tu compás en el punto *C* y traza un arco sobre la semirrecta. Rotula el punto en el que el arco interseca a la semirrecta como punto *D*. El segmento *CD* es congruente con el segmento *AB*.

Para duplicar $\overline{AB}$ usando *patty paper*, simplemente coloca el papel sobre el segmento y cálcalo, usando una regla no graduada para asegurarte de que el trazado sea derecho.

## Investigación 2: Duplicación de un ángulo

En esta investigación copiarás este ángulo usando un compás y una regla no graduada.




Traza una semirrecta más larga que un lado de $\angle DEF$. Rotula el extremo de la semirrecta con la letra *G*. Esta semirrecta será un lado del ángulo duplicado. Trata de pensar cómo duplicar $\angle DEF$ por tu cuenta, antes de consultar el Paso 1 de tu libro. Puedes usar un transportador para verificar que los ángulos son congruentes.

El Paso 1 muestra las dos primeras etapas del proceso de duplicación de $\angle DEF$. Las etapas se describen a continuación.

**Etapa 1:** Usa tu compás para construir un arco con su centro en el punto *E*. El arco debe intersecar a ambos lados del ángulo. *Sin cambiar la apertura de tu compás,* traza un arco centrado en el punto *G*.

**Etapa 2:** En $\angle DEF$, coloca la punta de tu compás en el punto en el que el arco interseca a $\overrightarrow{EF}$. Ajusta la apertura de manera que el otro extremo toque el punto en el que el arco interseca a $\overrightarrow{ED}$, y traza un arco. *Sin cambiar la apertura de tu compás,* coloca la punta de tu compás en el punto en el que el arco interseca a la semirrecta con el punto *G* y traza un arco que interseca el arco original.

Para finalizar la construcción, dibuja una semirrecta desde el punto *G*, pasando por el punto donde los dos arcos se intersecan. Usa un transportador para verificar que $\angle G$ es congruente con $\angle DEF$.

Practica la duplicación de otros ángulos hasta que estés seguro de que comprendes los pasos. No olvides de duplicar los ángulos obtusos además de los ángulos agudos.

Ahora trata de duplicar $\angle DEF$ usando *patty paper*, en vez de un compás.

Escribe un resumen de los métodos de construcción que aprendiste en esta lección.

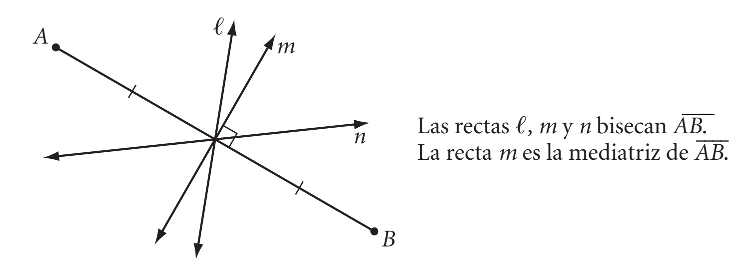



# Construcción de mediatrices

En esta lección

- Construirás la **mediatriz** de un segmento usando *patty paper* y una regla no graduada y usando un compás y una regla no graduada
- Completarás la **conjetura de la mediatriz**
- Conocerás las **medianas** y los **segmentos medios** de los triángulos

Una **bisectriz de segmento** es una recta, una semirrecta o un segmento que pasa por el punto medio del segmento. Una recta que pasa por el punto medio de un segmento y que es perpendicular al segmento se conoce como **mediatriz** (*perpendicular bisector*) del segmento. Un segmento tiene un número infinito de bisectrices, pero en un plano tiene *una sola* mediatriz.




## Investigación 1: Encontrar la bisectriz correcta

Sigue los Pasos 1–3 en tu libro para construir una mediatriz del $\overline{PQ}$ usando *patty paper*.

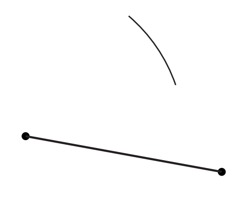
Coloca tres puntos—*A*, *B* y *C*—sobre la meditriz, y usa tu compás para comparar las distancias *PA* y *QA*, *PB* y *QB*, y *PC* y *QC*. En cada caso, debes encontrar que las distancias son iguales. Estos descubrimientos conducen a la siguiente conjetura.

**Conjetura de la mediatriz** Si un punto está sobre la mediatriz de un segmento, entonces es equidistante con respecto a los extremos. **C-5**

¿Es cierto también el recíproco? O sea, si un punto es equidistante a los extremos de un segmento, ¿se encuentra sobre la mediatriz del segmento? Si el recíproco es cierto, entonces la ubicación de estos dos puntos puede ayudarte a localizar la mediatriz.

## Investigación 2: Exactamente en el medio

En esta investigación usarás un compás y una regla no graduada para construir la mediatriz de un segmento. Primero dibuja un segmento de recta. Después sigue los pasos siguientes.



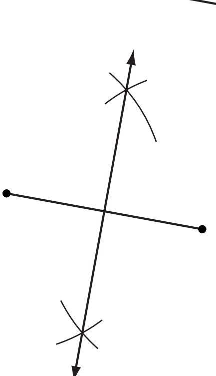
Ajusta tu compás de manera que la apertura sea mayor que la mitad de la longitud del segmento. Usando un extremo como centro, traza un arco por un lado del segmento.

**(continúa)**

*Sin cambiar la apertura de tu compás,* coloca la punta de tu compás en el otro extremo y traza un arco que interseca al primer arco.



El punto en el que los arcos se intersecan es equidistante a los dos extremos. Sigue los mismos pasos para localizar otro de estos puntos al otro lado del segmento. Después dibuja una recta que pasa por los dos puntos.

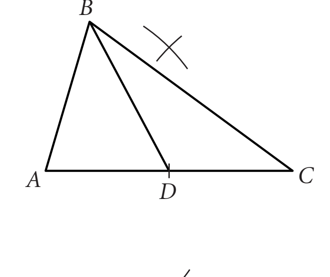


La recta que dibujaste es la mediatriz del segmento. Puedes verificar esto doblando el segmento, de manera que sus extremos coincidan (como hiciste en la Investigación 1). La recta debe caer sobre el pliegue del papel.

La construcción que hiciste en esta investigación demuestra la conjetura siguiente.



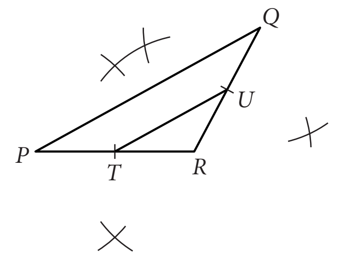

**El recíproco de la conjetura de la mediatriz** Si un punto es equidistante a los extremos de un segmento, entonces está sobre la mediatriz del segmento.




Ahora que sabes cómo construir una mediatriz, puedes localizar el punto medio de cualquier segmento. Esto te permite construir dos tipos especiales de segmentos relacionados con triángulos: medianas y segmentos medios.

Una **mediana** es un segmento que conecta un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto. Para construir la mediana desde el vértice $B$, usa la construcción de la mediatriz para ubicar el punto medio de $\overline{AC}$. Después conecta el vértice $B$ con ese punto.

Un **segmento medio** es un segmento que conecta los puntos medios de dos lados de un triángulo. Para construir un segmento medio de $\overline{PR}$ a $\overline{QR}$, usa la construcción de la mediatriz dos veces para ubicar los puntos medios de $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$. Después conecta los puntos medios.




Escribe un resumen de los métodos de construcción que aprendiste en esta lección.




# Construcción de perpendiculares a una recta

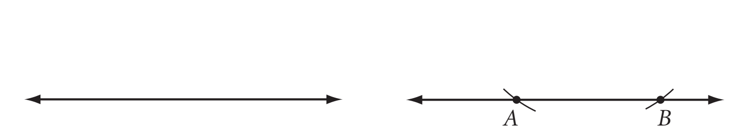
En esta lección

- Construirás la **perpendicular** a una recta desde un punto que no esté sobre la recta
- Completarás la **conjetura de la distancia más corta**
- Conocerás las **altitudes** de los triángulos

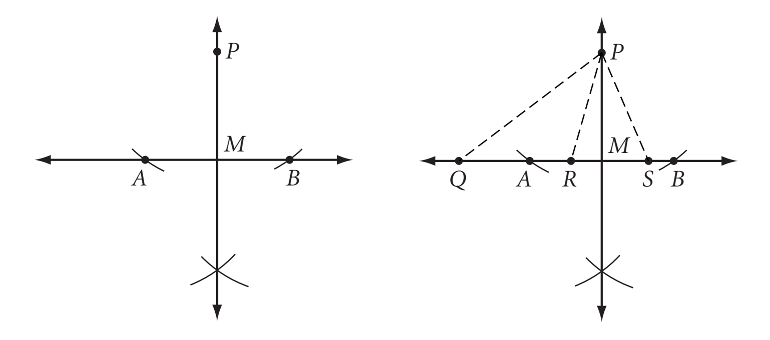
En la lección 3.2, aprendiste a construir la mediatriz de un segmento. En esta lección usarás lo que aprendiste para construir la perpendicular a una recta desde un punto que no está sobre esa recta.

### Investigación 1: Encontrar la recta correcta

Dibuja una recta y un punto *P*, que no esté sobre la recta. Con la punta de tu compás apoyado en el punto *P*, traza dos arcos sobre la recta. Rotula los puntos de intersección como *A* y *B*.




Observa que $PA = PB$, así que el punto *P* está sobre la mediatriz de $\overline{AB}$. Usa la construcción que aprendiste en la Lección 3.2 para construir la mediatriz de $\overline{AB}$. Rotula el punto medio de $\overline{AB}$ como *M*. Ahora has construido una perpendicular a una recta desde un punto que no está sobre la recta. Elige cualesquier tres puntos sobre $\overleftrightarrow{AB}$ y rotúlalos como *Q*, *R* y *S*. Mide *PQ*, *PR*, *PS* y *PM*. ¿Qué distancia es la más corta?




Tus observaciones deben conducir a esta conjetura.

**Conjetura de la distancia más corta** La distancia más corta de un punto a una recta se mide a lo largo del segmento perpendicular, desde el punto a la recta. **C-7**

En la siguiente investigación usarás el *patty paper* para crear una perpendicular de un punto a una recta.

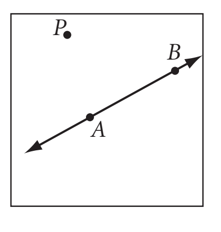
**(continúa)**

## Investigación 2: Perpendiculares de papel

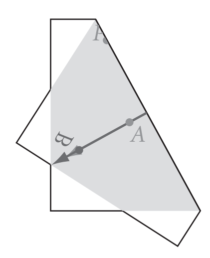
Sobre una hoja de *patty paper*, dibuja una recta $\overleftrightarrow{AB}$ y un punto *P* que no esté sobre $\overleftrightarrow{AB}$.

Dobla la recta sobre sí misma. Desliza las capas de papel (manteniendo $\overleftrightarrow{AB}$ alineada consigo mismo) hasta que el punto *P* se sitúe en el pliegue.

Dobla el papel, ábrelo, y dibuja una recta sobre el doblez. La recta es la perpendicular de $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por el punto *P*. (¿Por qué?)



Paso 1

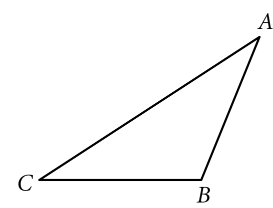


Paso 2

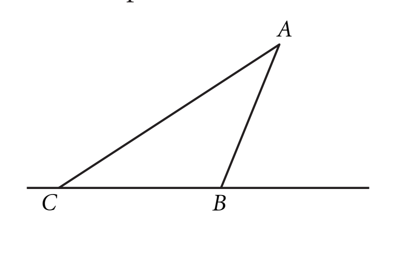
La construcción de una perpendicular de un punto a una recta te permite encontrar la distancia del punto a la recta, que se define así: "La **distancia de un punto a una recta** es la longitud del segmento perpendicular que va del punto a la recta".

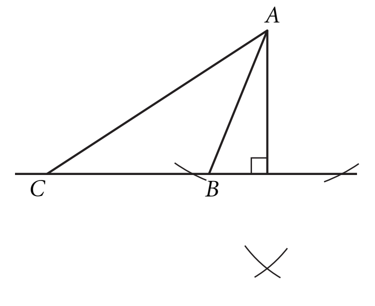
La **altitud** de un triángulo es un segmento perpendicular que va del vértice de un triángulo a la recta del lado opuesto. La longitud de este segmento es la altura del triángulo. Las ilustraciones de la página 156 de tu libro muestran que una altitud puede estar dentro o fuera del triángulo, o puede ser uno de los lados del triángulo. Un triángulo tiene tres diferentes altitudes, así que tiene tres alturas diferentes.

***EJEMPLO*** Construye la altitud del vértice *A* de $\triangle ABC$.




▶ ***Solución*** Alarga $\overline{CB}$ para que se convierta en $\overleftrightarrow{CB}$ y construye un segmento perpendicular desde el punto *A* hasta $\overleftrightarrow{CB}$.




Escribe un resumen de los métodos de construcción que aprendiste en esta lección.




# Construcción de bisectrices de ángulos

En esta lección

- Construirás una **bisectriz de ángulo** usando *patty paper* y una regla no graduada, y usando un compás y una regla no graduada
- Completarás la **conjetura de la bisectriz de ángulo**

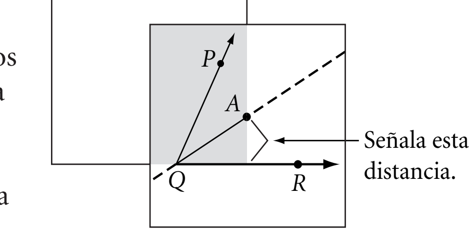
Una **bisectriz de ángulo** es una semirrecta que divide un ángulo en dos ángulos congruentes. Un segmento también se califica como una bisectriz de ángulo si el segmento cae en la semirrecta y pasa por el vértice del ángulo.

## Investigación 1: Bisecar un ángulo por doblar

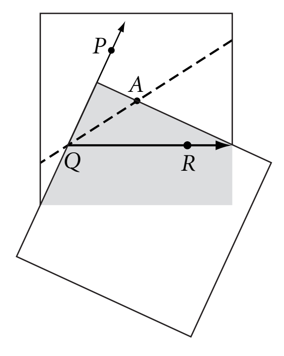
Sigue los Pasos 1–3 de tu libro para construir la bisectriz del ángulo agudo $\angle PQR$ usando *patty paper.* Puedes estar seguro de que la semirrecta que construyas es la bisectriz de ángulo porque el pliegue forma dos ángulos que coinciden.

Ahora construye la bisectriz de un ángulo obtuso. ¿Puedes usar el mismo método que usaste para bisecar al ángulo agudo?

¿Todo ángulo tiene una bisectriz? ¿Es posible que un ángulo tenga más de una bisectriz? Si no estás seguro, experimenta hasta que consideres que sabes las respuestas a estas dos preguntas.




Observa los ángulos que bisecaste. ¿Ves alguna relación entre los puntos de la bisectriz del ángulo y los lados del ángulo? Elige uno de los ángulos bisecados. Elige cualquier punto de la bisectriz y rotúlalo como *A*. Compara las distancias de *A* a cada uno de los dos lados. (Recuerda que "distancia" significa la distancia *más corta.*) Para hacer esto, puedes poner el margen de una segunda hoja de *patty paper* sobre un lado del ángulo. Desliza la orilla del papel a lo largo del lado del ángulo, hasta que un lado perpendicular adyacente del papel pase por el punto. Marca esta distancia sobre el papel.




Compara esta distancia con la distancia al otro lado del ángulo, repitiendo el proceso en la otra semirrecta.

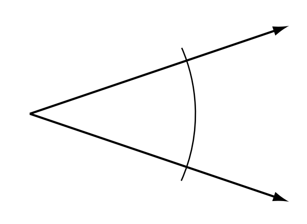
Tus observaciones deben conducir a esta conjetura.

**Conjetura de la bisectriz de ángulo** Si un punto está sobre la bisectriz de un ángulo, entonces es equidistante a los lados del ángulo. **C-8**

**(continúa)**

## Investigación 2: Bisecar un ángulo con compás

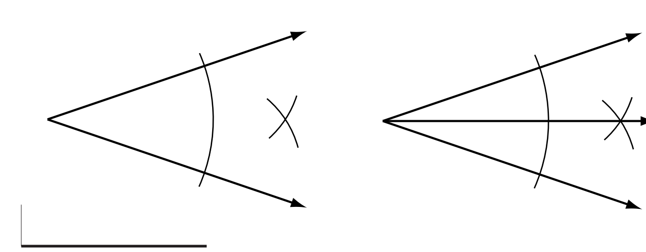
También puedes construir una bisectriz usando un compás y una regla no graduada.



Dibuja un ángulo. Para iniciar la construcción, dibuja un arco centrado en el vértice del ángulo que cruza ambos lados del ángulo.

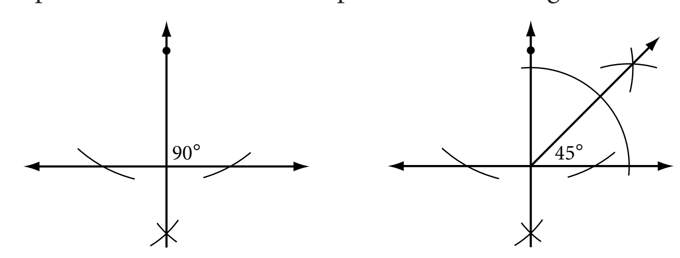
Trata de completar la construcción por tu cuenta, antes de leer el siguiente texto. No temas experimentar. Si cometes un error, siempre podrás comenzar de nuevo. Cuando consideres que has construido una bisectriz de ángulo, dobla tu papel para verificar si la semirrecta que has construido es en realidad la bisectriz.

*Construcción de la bisectriz de ángulo:* Coloca la punta de tu compás en uno de los puntos en los que el arco interseca al ángulo, y traza un arco. *Sin cambiar la apertura de tu compás,* repite este proceso con el otro punto de intersección. Si los dos arcos pequeños no intersecan, agranda la apertura de tu compás y repite los dos últimos pasos. Dibuja la semirrecta desde el vértice del ángulo hasta el punto en el que se intersecan los dos pequeños arcos.



***EJEMPLO*** Construye un ángulo con una medida de exactamente 45° usando solamente un compás y una regla no graduada.

► ***Solución*** Construye un ángulo de 90° por construir la perpendicular a una recta, desde un punto que no esté en ella. (Consulta la Lección 3.3 si necesitas revisar esta construcción.) Después usa la construcción de la bisectriz de ángulo que aprendiste en esta lección para bisecar el ángulo de 90°.




Escribe un resumen de los métodos de construcción que aprendiste en esta lección.




# Construcción de rectas paralelas

En esta lección

- Construirás **rectas paralelas** usando *patty paper* y una regla no graduada

Como aprendiste en el Capítulo 1, las **rectas paralelas** son rectas que caen en el mismo plano y no se intersecan. Así pues, cualesquier dos puntos en una recta paralela serán equidistantes a la otra recta. Puedes usar esta idea para construir una recta paralela a una recta dada.

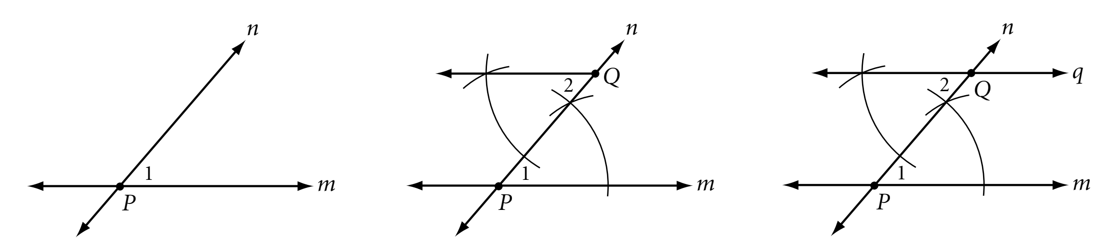
### Investigación: Construir rectas paralelas por doblar

Sigue los Pasos 1–3 de tu libro para construir rectas paralelas con *patty paper*. Observa que los pares de ángulos correspondientes, ángulos alternos internos, y ángulos alternos externos son congruentes. (En este caso, todas son pares de ángulos rectos.)

En el siguiente ejemplo se muestra otra forma de construir rectas paralelas.

***EJEMPLO*** Usa el recíproco de la conjetura de los ángulos alternos internos para construir un par de rectas paralelas. (Intenta hacer esto por tu cuenta, antes de leer la solución.)

▶ ***Solución*** Dibuja dos rectas que se intersecan y rotúlalas como *m* y *n*. Rotula el punto de intersección *P* y rotula uno de los ángulos formados $\angle 1$. En la recta *n*, rotula el punto *Q* que está en el mismo lado de la recta *m* que $\angle 1$. Usando el punto *Q* como vértice y $\overrightarrow{QP}$ como lado, duplica $\angle 1$ en el lado opuesto de la recta *n*. Rotula el nuevo ángulo $\angle 2$. Alarga el lado de $\angle 2$ formando la recta *q*.




Observa que la recta *m* y la recta *q* son cortadas por una transversal (recta *n*) para formar un par congruente de ángulos alternos internos ($\angle 1$ y $\angle 2$). De acuerdo con el recíproco de la conjetura AIA, $m \parallel q$.

Ahora ve si puedes usar el recíproco de la conjetura de los ángulos correspondientes o el recíproco de la conjetura de los ángulos alternos externos para construir un par de rectas paralelas.

Escribe un resumen de los métodos de construcción que aprendiste en esta lección.




# Problemas de construcción

En esta lección

- Construirás polígonos, dada cierta información respecto a algunos de los lados y ángulos

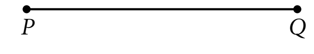
En este capítulo has aprendido a construir ángulos y segmentos congruentes, bisectrices de ángulo y de segmento, perpendiculares, mediatrices y rectas paralelas. Una vez que conoces estas construcciones básicas, puedes crear figuras geométricas más avanzadas.

En el Ejemplo A de tu libro se muestra cómo construir un triángulo, si se dan tres segmentos para usar como lados. Este ejemplo también explora una pregunta importante: Si se proporcionan tres segmentos, ¿cuántos triángulos de distintos tamaños puedes formar? Lee el ejemplo atentamente.

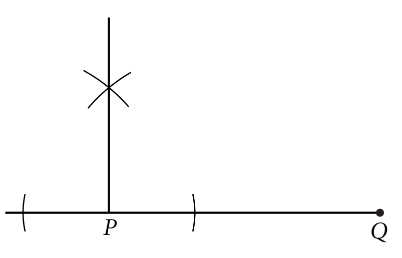
En el Ejemplo B se muestra cómo construir un triángulo, si se dan tres ángulos. En este ejemplo se muestra que tres ángulos *no* determinan un triángulo único. Dadas tres medidas de ángulos, puedes dibujar un número infinito de triángulos. Todos los triángulos tendrán la misma forma, pero tendrán distintos tamaños.

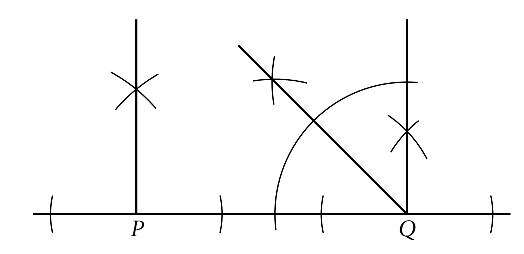
Los siguientes ejemplos muestran algunas otras construcciones.

**EJEMPLO A** Usa compás y regla no graduada para construir $\triangle PQR$ con $\overline{PQ}$ como lado, y con $m\angle P = 90°$ y $m\angle Q = 45°$.

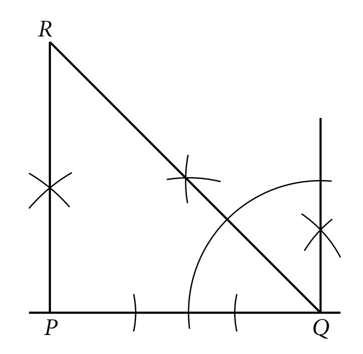



**▶ Solución** Para construir $\angle P$, alarga $\overline{PQ}$ hacia la izquierda y construye una perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ a través del punto $P$. Para construir $\angle Q$, primero construye una perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ a tráves del punto $Q$. Esto crea un ángulo recto con vértice en $Q$. Para crear un ángulo de 45°, biseca este ángulo.



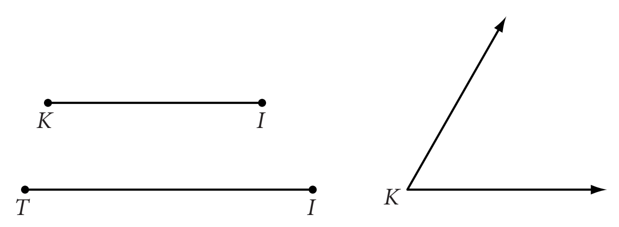




Para terminar la construcción, alarga los lados de $\angle P$ y $\angle Q$ hasta que se intersequen. Rotula el punto de intersección como $R$.

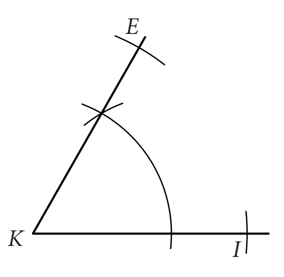



**(continúa)**

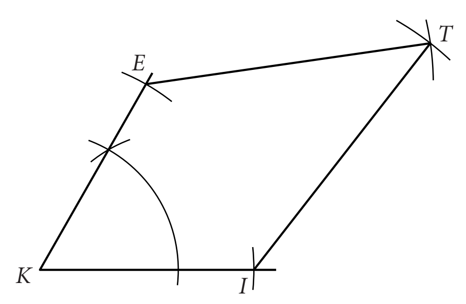
***EJEMPLO B*** Construye el papalote *KITE*, en el que $KI = KE$ y $TI = TE$, usando los segmentos y el ángulo siguientes.




► ***Solución*** Duplica $\overline{KI}$ y $\angle K$. Como $KI = KE$, duplica $\overline{KI}$ al otro lado de $\angle K$, para crear el lado $\overline{KE}$.




Para ubicar el vértice *T*, traza un gran arco con radio *TI* centrado en el punto *I*. El vértice *T* debe estar sobre este arco. Como $TI = TE$, dibuja otro gran arco con radio *TI* centrado en el punto *E*. La intersección de los dos arcos es el punto *T*. Conecta los puntos *E* e *I* con el punto *T* para terminar el papalote.






# Construcción de puntos de concurrencia

En esta lección

- Construirás el **incentro,** el **circuncentro** y el **ortocentro** de un triángulo
- Harás conjeturas respecto a las propiedades del incentro y del circuncentro de un triángulo
- **Circunscribirás** un círculo a un triángulo e **inscribirás** un círculo en un triángulo

Puedes usar las construcciones que aprendiste en este capítulo para construir segmentos especiales relacionados con los triángulos. En esta lección construirás las bisectrices de ángulo y las altitudes de un triángulo, así como las mediatrices de los lados de un triángulo. Después de que construyas cada conjunto de tres segmentos, determinarás si son *concurrentes.* Tres o más segmentos, rectas, semirrectas o planos son **concurrentes** si se intersecan en un solo punto. El punto de intersección se llama el **punto de concurrencia.**

## Investigación 1: Concurrencia

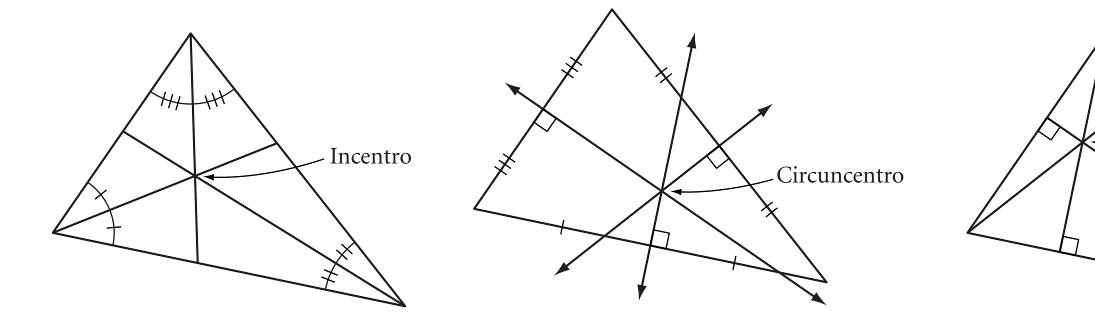
En esta investigación puedes realizar las construcciones con *patty paper* y regla no graduada o con compás y regla no graduada. Guarda tus construcciones para usarlas en la Investigación 2.

Si vas a usar *patty paper*, dibuja un triángulo agudo grande en una hoja y un triángulo obtuso grande en otra. Si usas un compás, dibuja los triángulos en las mitades de arriba y de abajo de una hoja de papel.

Construye las bisectrices de los tres ángulos de cada triángulo. Debes encontrar que son concurrentes. El punto de concurrencia se llama el **incentro** del triángulo.

Comienza con dos nuevos triángulos, uno agudo y uno obtuso, y construye la mediatriz de cada lado. Debes encontrar que en cada triángulo, las tres mediatrices son concurrentes. El punto de concurrencia se llama el **circuncentro.**

Finalmente, comienza con dos nuevos triángulos y construye la altitud de cada lado. Estos segmentos también son concurrentes. El punto de concurrencia se llama el **ortocentro.**




Tus observaciones en esta investigación conducen a las siguientes conjeturas.

**Conjetura de la concurrencia de las bisectrices de ángulo** Las tres bisectrices de ángulo de un triángulo son concurrentes. **C-9**

**(continúa)**

**C-10** **Conjetura de la concurrencia de las mediatrices** Las tres mediatrices de un triángulo son concurrentes.

**C-11** **Conjetura de la concurrencia de las altitudes** Las tres altitudes (o las rectas que las contienen) de un triángulo son concurrentes.

¿Para qué tipo de triángulo son iguales el incentro, el circuncentro, y el ortocentro? Si no lo sabes, experimenta con diferentes tipos de triángulos (escalenas, isósceles, equiláteros, agudos, obtusos y rectos).

## Investigación 2: Circuncentro

Para esta investigación necesitarás tus triángulos de la Investigación 1 que muestran las mediatrices de los lados. Para cada triángulo, mide la distancia desde el circuncentro hasta cada uno de los tres vértices. ¿Las distancias son iguales? Ahora mide la distancia desde el circuncentro hasta cada uno de los tres lados. ¿Las distancias son iguales? Usa un compás para construir un círculo con el circuncentro como centro que pasa por un vértice del triángulo. ¿Qué es lo que notas?

Puedes expresar tus descubrimientos como la conjetura del circuncentro.

**C-12** **Conjetura del circuncentro** El circuncentro de un triángulo es equidistante a los tres vértices.

## Investigación 3: Incentro

Necesitarás tus triángulos de la Investigación 1 que muestran las bisectrices de los ángulos. Para cada triángulo, mide la distancia desde el incentro hasta cada uno de los tres vértices. ¿Las distancias son iguales?

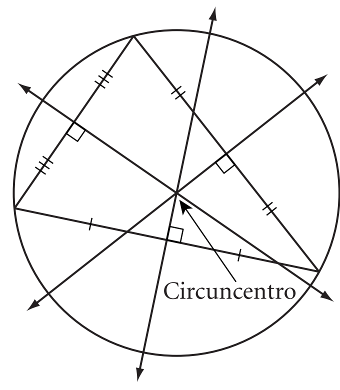
Construye la mediatriz desde el incentro hasta cualquiera de los lados del triángulo. Señala los puntos de intersección entre la mediatriz y el lado. Ahora usa un compás para construir un círculo con el incentro como centro que pasa por el punto que acabas de señalar. ¿Qué es lo que notas? ¿Qué conclusiones puedes tomar acerca de la distancia del incentro desde cada uno de los lados?

Puedes expresar tus descubrimientos como la conjetura del incentro.

**C-13** **Conjetura del incentro** El incentro de un triángulo es equidistante de los tres lados.

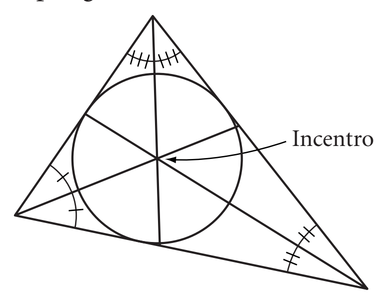
Lee el argumento deductivo de la conjetura del circuncentro en la páginas 180–181 de tu libro y asegúrate de comprenderla.

Un círculo que pasa por cada vértice de un polígono está **circunscrito** al polígono. El polígono está **inscrito** en el círculo.

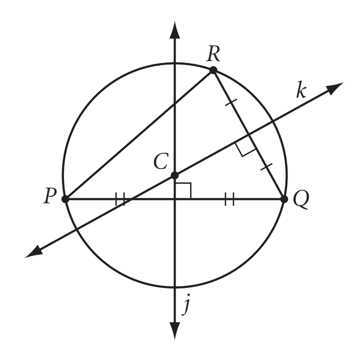



**(continúa)**

Un círculo que es tangente a cada lado de un polígono está **inscrito** en el polígono. El polígono está **circunscrito** al círculo.




¿Por qué el método para construir el circuncentro garantiza que es el centro del círculo que está circunscrito al triángulo? Escribe tus propios motivos antes de leer el argumento lógico de abajo. Puedes usar el diagrama para que te ayude al escribir tu argumento.

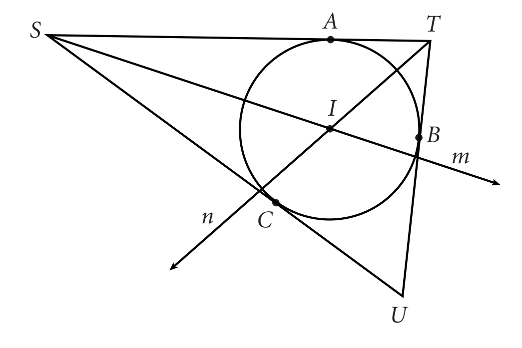



### Argumento deductivo

Un círculo es un conjunto de puntos equidistantes del punto central. Si un punto está ubicado de manera equidistante de los tres vértices de un triángulo, ese punto se puede usar como el centro de un círculo circunscrito al triángulo.

Si la conjetura de la mediatriz es cierta, cada punto en la mediatriz de un segmento equidista de los dos extremos. Entonces todos los puntos en la recta *k* equidistan de los puntos *R* y *Q*, y todos los puntos en la recta *j* equidistan de los puntos *P* y *Q*. Como el circuncentro *C* está en la intersección de las rectas *j y k*, el punto *C* debe ser equidistante de los tres vértices, puntos *R, Q* y *P*. Si un círculo está construido con el centro *C* que pasa por un vértice, por ejemplo, punto *R* también pasará por los otros dos porque todos los puntos en un círculo están a la misma distancia desde el centro. Ese círculo es el círculo circunscrito al $\triangle PQR$.

Usa un argumento lógico similar para explicar por qué el incentro es el centro del círculo inscrito. Escribe tu propio argumento lógico antes de leer el de la página siguiente. Usa el diagrama como ayuda.



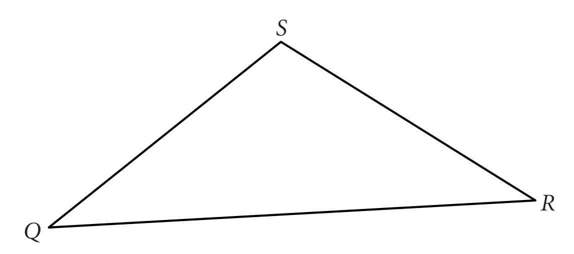

**(continúa)**

### Argumento deductivo

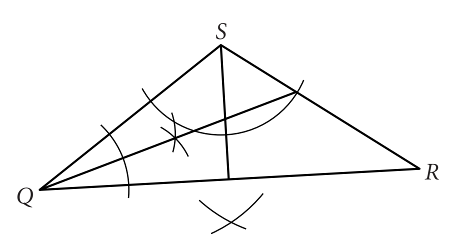
Un círculo es un conjunto de puntos equidistantes del punto central dado. Si un punto equidista de los tres lados de un triángulo, se puede usar como el centro de un círculo inscrito.

Si la conjetura de la bisectriz del $\angle S$ es cierta, todos los puntos en la bisectriz del ángulo equidistan de los dos lados del ángulo. Por lo tanto, en $\triangle STU$ cada punto en $m$, la bisectriz del ángulo, equidista de los lados del triángulo $\overline{ST}$ y $\overline{TU}$. De forma similar, cada punto en $n$, la bisectriz del $\angle T$, equidista de los lados del triángulo $\overline{ST}$ y $\overline{TU}$. Como el incentro $I$ está en $m$ y $n$ equidista de los tres lados. Entonces, el círculo con el centro en el incentro $I$ que es tangente a uno de los lados también será tangente a los dos otros lados. Ese círculo es el círculo inscrito en el triángulo.

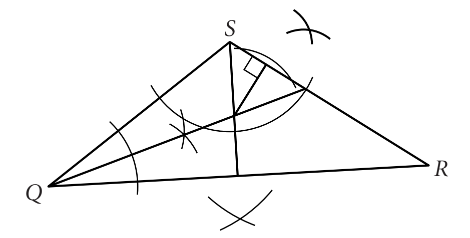
***EJEMPLO*** Inscribe un círculo en $\triangle QRS$.

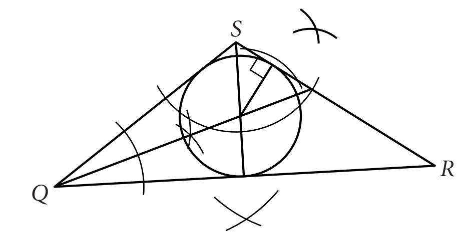



► ***Solución*** Para encontrar el centro del círculo, construye el incentro. Observa que sólo necesitas construir dos bisectrices de ángulo para localizar el incentro. (¿Por qué?)




El radio del círculo es la distancia desde el incentro a cada lado. Para encontrar el radio, construye una perpendicular desde el incentro a uno de los lados. Aquí construimos la perpendicular a $\overline{RS}$. Ahora dibuja el círculo.






# El centroide

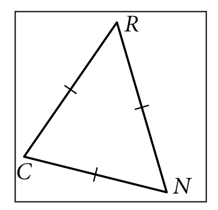
En esta lección

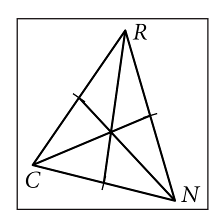
- Construirás el **centroide** de un triángulo
- Harás conjeturas respecto a las propiedades del centroide de un triángulo

Ya has visto que las tres bisectrices de ángulo, las tres mediatrices de los lados, y las tres altitudes de un triángulo son concurrentes. En esta lección veremos las tres medianas de un triángulo.

## Investigación 1: ¿Son concurrentes las medianas?

En una hoja de *patty paper* dibuja un triángulo agudo escaleno grande y rotúlalo como *CNR*. Localiza los puntos medios de los tres lados y construye las medianas. Debes encontrar que las medianas son concurrentes. Guarda este triángulo.

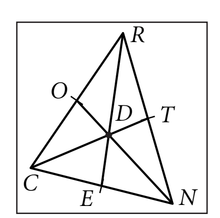



Ahora comienza con un triángulo obtuso escaleno y construye las tres medianas. ¿Son concurrentes las medianas? Puedes expresar tus descubrimientos como una conjetura.

**C-14** **Conjetura de la concurrencia de las medianas** Las tres medianas de un triángulo son concurrentes.

El punto de concurrencia de las tres medianas es el **centroide.** En tu triángulo agudo, rotula las medianas como $\overline{CT}$, $\overline{NO}$ y $\overline{RE}$. Rotula el centroide como *D*.




Usa tu compás o *patty paper* para investigar el centroide: ¿El centroide es equidistante a los tres vértices? ¿Es equidistante a los tres lados? ¿El centroide es el punto medio de cada mediana?

El centroide *D* divide cada mediana en dos segmentos. Para cada mediana encuentra la razón de la longitud del segmento más largo con respecto a la longitud del segmento más corto. Debes encontrar que para cada mediana la razón es la misma. Usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.

**C-15** **Conjetura del centroide** El centroide de un triángulo divide cada mediana en dos partes, de manera que la distancia desde el centroide hasta el vértice es _________________ la distancia desde el centroide hasta el punto medio del lado opuesto.

**(continúa)**

En la Lección 3.7 aprendiste que el circuncentro de un triángulo es el centro del círculo circunscrito y el incentro es el centro del círculo inscrito. En la siguiente investigación descubrirás una propiedad especial del centroide.

## Investigación 2: Acto de equilibrio

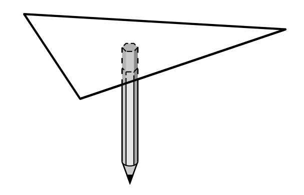
Para esta investigación necesitarás una hoja de cartulina y tu triángulo agudo escaleno de la Investigación 1.

Coloca tu triángulo de *patty paper* sobre la cartulina. Con la punta de tu compás marca sobre la cartulina los tres vértices, los tres puntos medios y el centroide. Quita el *patty paper* y dibuja cuidadosamente el triángulo y las medianas sobre la cartulina. Corta el triángulo de cartulina.

Intenta equilibrar el triángulo colocando una de sus medianas sobre el borde de una regla.

Debes lograr el equilibrio del triángulo. Repite el proceso con cada una de las otras medianas. El hecho de que puedas equilibrar el triángulo sobre cada mediana significa que cada mediana divide el triángulo en dos regiones triangulares de igual área.

Ahora trata de equilibrar el triángulo colocando su centroide sobre el extremo de un lápiz o de un bolígrafo. Si has trazado y cortado el triángulo cuidadosamente, debe guardar el equilibrio. Como el triángulo se equilibra sobre su centroide, el centroide es el **centro de gravedad** del triángulo.



Puedes expresar tus descubrimientos como una conjetura.

**Conjetura del centro de gravedad** El centroide de un triángulo es el centro de gravedad de la región triangular. **C-16**

Observa que tiene sentido que el triángulo se equilibre sobre el centroide porque guarda el equilibrio sobre cada mediana, y el centroide está sobre cada mediana. Siempre que el peso de la cartulina se distribuya uniformemente por todo el triángulo, podrás equilibrar cualquier triángulo sobre su centroide.




# Conjetura de la suma angular en triángulos

En esta lección

- Establecerás una conjetura respecto a la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo
- Completarás una prueba de párrafo para la **conjetura de la suma angular en triángulos**

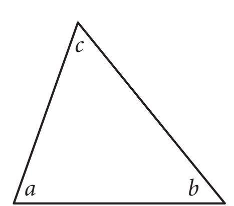
En este capítulo te concentrarás en las propiedades de los triángulos. Para empezar, observarás las medidas de los ángulos de los triángulos.

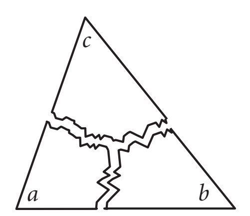
### Investigación: La suma angular en triángulos

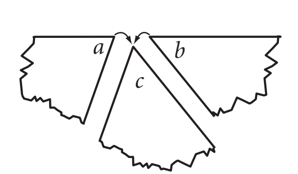
Dibuja dos triángulos agudos grandes con formas muy diferentes y dos triángulos obtusos grandes también con formas muy distintas.

En cada triángulo mide los tres ángulos lo más exactamente posible y después halla la suma de las tres medidas. Debes encontrar que la suma de los ángulos de cada triángulo es la misma. ¿Cuál es la suma de los ángulos?

Para verificar esta suma, escribe las letras *a, b,* y *c* en el interior de los tres ángulos de uno de los triángulos agudos y recorta cuidadosamente el triángulo. Después rasga los tres ángulos del triángulo y acomódalos de manera que sus vértices se junten en un punto.



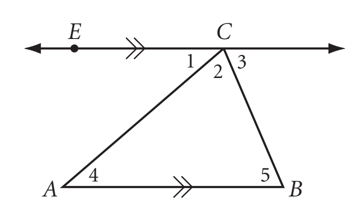





¿De qué manera verifica este arreglo la suma de los ángulos que encontraste antes?

**Conjetura de la suma angular en triángulos** La suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es 180°. **C-17**

A continuación escribirás una **prueba de párrafo** para mostrar por qué la conjetura de la suma angular en triángulos es cierta. En tu prueba, puedes usar conjeturas, definiciones y propiedades para respaldar tu argumento. Observa la figura a la derecha. $\triangle ABC$ es cualquier triángulo. $\overleftrightarrow{EC}$ está dibujado paralelo a $\overline{AB}$. *Observación*: $\overleftrightarrow{EC}$ es una **recta auxiliar** (o recta de ayuda) porque es una recta adicional añadida a la figura para ayudar con la prueba. Toma en consideración las pregunta en la página 201 de tu libro. Copia el diagrama y marca las relaciones de los ángulos que pueden ayudarte con la prueba. Después usa el diagrama y las respuestas que tienes de estas preguntas para escribir una prueba de párrafo explicando por qué la conjetura de la suma angular en triángulos es cierta.



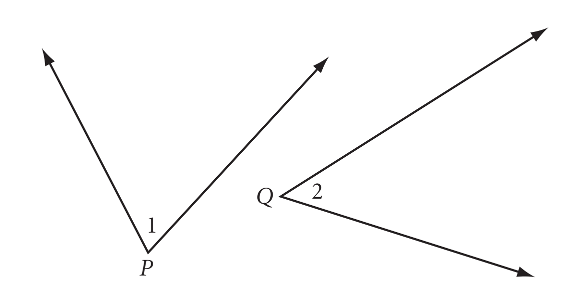

Después que hayas terminado, compara tu prueba de párrafo con la de la página 202 de tu libro.

(continúa)

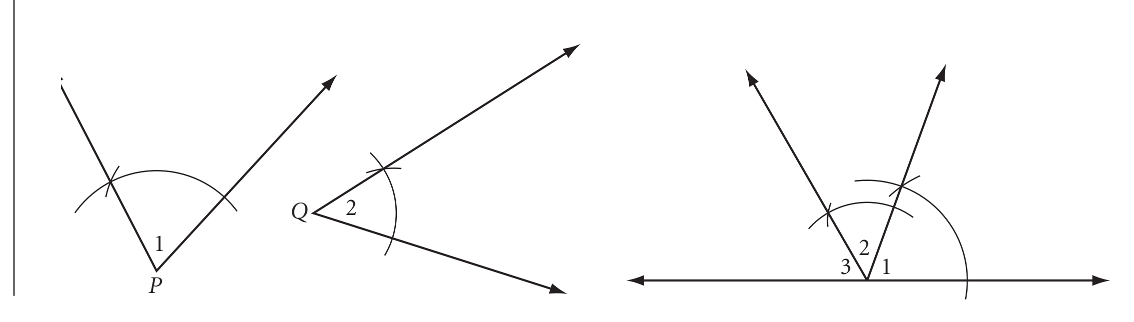
## Lección 4.1 • Conjetura de la suma angular en triángulos (continuación)

La conjetura de la suma angular en triángulos te permite construir el tercer ángulo de un triángulo si te dan los otros dos ángulos. Trabaja con el ejemplo de tu libro. El siguiente ejemplo muestra un método apenas diferente. Intenta ver si uno de estos métodos es más fácil. ¿Puedes hallar otro método que funcione?

***EJEMPLO A*** Dados $\angle P$ y $\angle Q$ de $\triangle PQR$, construye $\angle R$.

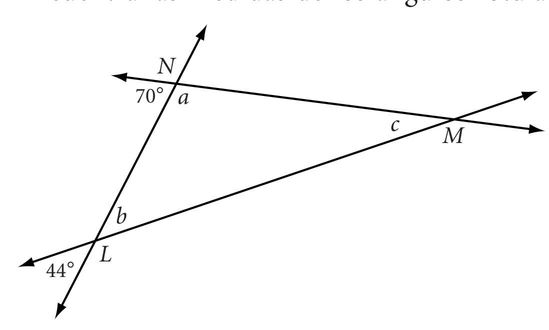



▶ ***Solución*** Dibuja una recta y constryuye $\angle P$ que se abra hacia la derecha sobre esta recta. Construye $\angle Q$ de manera tal que comparta tanto el vértice de $\angle P$ y el lado de $\angle P$ que no está en la recta. El ángulo rotulado 3 en el diagrama es $\angle R$, porque la suma de las medidas de los tres ángulos es 180°.




El siguiente ejemplo aplica lo que has aprendido en esta lección.

***EJEMPLO B*** Encuentra las medidas de los ángulos rotulados con letras.



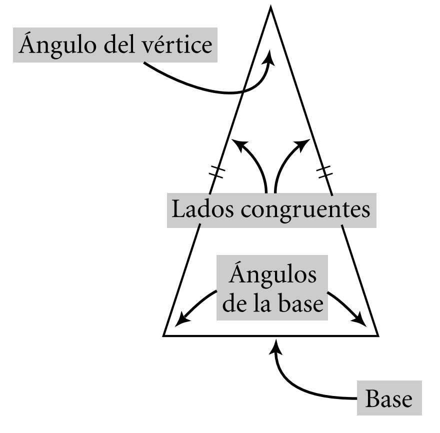

▶ ***Solución*** El ángulo $a$ y el ángulo de 70° forman un par lineal, entonces $a + 70° = 180°$. Por lo tanto, $a = 110°$. El ángulo $b$ y el ángulo de 44° son opuestos por el vértice, entonces $b = 44°$. Según la conjetura de la suma angular en triángulos, $110° + 44° + c = 180°$, entonces, $c = 26°$.




# Propiedades de los triángulos isósceles

En esta lección

- Descubrirás cómo se relacionan los ángulos de un triángulo isósceles
- Formularás una conjetura respecto a los triángulos que tienen dos ángulos congruentes




Un *triángulo isósceles* es un triángulo que tiene al menos dos lados congruentes. El ángulo que está entre los lados congruentes se denomina *ángulo del vértice*. Los otros dos ángulos se denominan *ángulos de la base*. El lado que está entre los ángulos de la base, se denomina *base*. Los otros dos lados se denominan *lados congruentes*.

## Investigación 1: Ángulos de la base en un triángulo isósceles

Dibuja un ángulo agudo $C$ en *patty paper*. Después sigue los Pasos 2 y 3 de tu libro para construir un triángulo isósceles, $\triangle ABC$.

Como $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$ son lados congruentes, $\angle C$ es el ángulo del vértice y $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos de la base. Usa tu transportador para medir los ángulos de la base. ¿Cómo se comparan las medidas? Confirma tu respuesta doblando tu *patty paper* y manteniendo $\overline{AB}$ alineado consigo mismo. ¿$\angle A \cong \angle B$?

Ahora dibuja otros dos triángulos isósceles, uno con un ángulo del vértice obtuso y otro con un ángulo del vértice recto. Compara los ángulos de la base de cada triángulo. ¿Sucede lo mismo que en el caso del triángulo agudo isósceles?

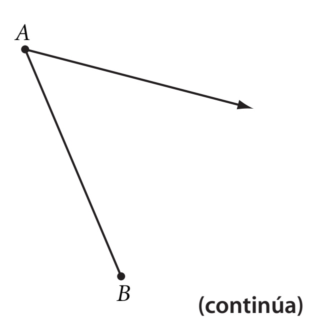
Tus observaciones deben llevar a la siguiente conjetura.

**Conjetura del triángulo isósceles** Si un triángulo es isósceles, entonces sus ángulos de la base son congruentes. **C-18**

Los triángulos equiláteros también son triángulos isósceles porque al menos dos de sus lados son congruentes. ¿Cómo crees que se aplica la conjetura del triángulo isósceles a los triángulos equiláteros?

Como sabes, la inversión de las partes "si" y "entonces" de una conjetura produce el *recíproco* de la conjetura. ¿Es cierto el recíproco de la conjetura del triángulo isósceles? En otras palabras, si un triángulo tiene dos ángulos congruentes, ¿es isósceles? Para probar esta proposición, necesitas dibujar un triángulo con dos ángulos congruentes.

## Investigación 2: ¿Es cierto el recíproco?

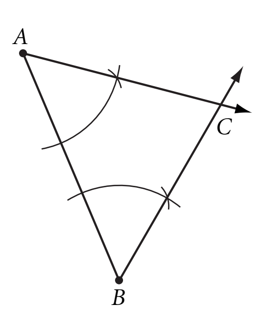



Dibuja un segmento, $\overline{AB}$, en tu papel. Dibuja un ángulo agudo en el punto $A$. En el triángulo terminado, $\angle A$ y $\angle B$ serán los ángulos congruentes.

Observa que $\angle A$ debe ser agudo. Si fuera recto u obtuso, la suma de las medidas de $\angle A$ y $\angle B$ sería mayor que o igual a 180° y, como sabes, la suma de las *tres* medidas de los ángulos debe ser 180°.

**(continúa)**

Ahora copia $\angle A$ en el punto $B$ al mismo lado que $\overline{AB}$. Si es necesario, alarga los lados de los ángulos hasta que se intersequen. Rotula el punto de intersección como $C$.




Usa tu compás para comparar las longitudes de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. ¿Parecen tener la misma longitud? Verifica tu respuesta usando *patty paper*. Dibuja al menos otro triángulo con dos ángulos congruentes y compara las longitudes de los lados. Tus resultados deben proporcionar evidencia de que el recíproco de la conjetura del triángulo isósceles es cierto.

**Recíproco de la Conjetura del triángulo isósceles** Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes, entonces es un triángulo isósceles. **C-19**

En el siguiente ejemplo, aplicarás lo que has aprendido.

***EJEMPLO***

$m\angle A =$ ______

$m\angle D =$ ______

$EC =$ ______

***Solución***

Según la conjetura de la suma angular en triángulos, $m\angle A + m\angle B + 42° = 180°$, por lo que $m\angle A + m\angle B = 138°$. Como $\angle A$ y $\angle B$ son los ángulos de la base de un triángulo isósceles, son congruentes. Entonces, $m\angle A = \frac{1}{2}(138°) = 69°$.

Como $\angle ACB$ y $\angle ECD$ son ángulos opuestos por el vértice, entonces son congruentes. Por lo tanto, $m\angle ECD = 42°$. Según la conjetura de la suma angular en triángulos, $42° + 96° + m\angle D = 180°$. Resolviendo para $m\angle D$, obtenemos $m\angle D = 42°$.

Como $\angle ECD \cong \angle D$, $\triangle CDE$ es isósceles según el recíproco de la conjetura del triángulo isósceles. Entonces, los lados son congruentes, así que $EC = ED = 3$ cm.




# Las desigualdades de los triángulos

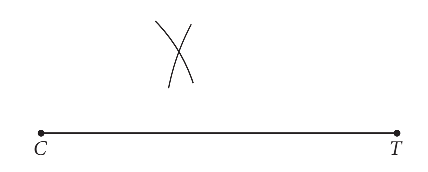
En esta lección

- Verás si puedes formar un triángulo a partir de cualesquier tres segmentos
- Descubrirás una relación entre las longitudes de los lados y las medidas de los ángulos de un triángulo
- Buscarás una relación entre la medida del **ángulo externo** de un triángulo y las medidas de los correspondientes **ángulos internos no adyacentes**

Si tienes tres segmentos, ¿siempre podrás formar un triángulo con esos segmentos como lados? En la siguiente investigación explorarás esta cuestión.

## Investigación 1: ¿Cuál es el camino más corto de *A* a *B*?

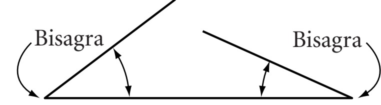
En el Paso 1 de la investigación, se te dan dos conjuntos de tres segmentos para utilizar como las longitudes de los lados de triángulos. Considera el primer conjunto de segmentos. Para construir $\triangle CAT$, primero copia $\overline{CT}$. Para construir los otros dos lados del triángulo, tiende un arco de longitud $AC$ centrado en el punto $C$, y un arco de longitud $AT$ centrado en el punto $T$. El punto $A$ es donde intersecan los dos arcos.



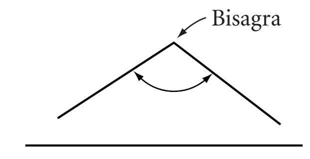

Ahora intenta usar el segundo conjunto de segmentos para construir $\triangle FSH$. ¿Puedes hacerlo? ¿Por qué sí o por qué no?

Deberías haber hallado que los arcos que hiciste usando las longitudes de dos de los lados no intersecan, entonces no fue posible construir $\triangle FSH$. En general, para que tres segmentos formen un triángulo, la suma de las longitudes de cualesquier dos segmentos debe ser mayor que la longitud del tercer segmento. A continuación se presentan dos formas de visualizar esto.

Imagina que dos de los segmentos estén conectados a los extremos del tercer segmento por medio de bisagras. Para formar un triángulo, necesitas poder dar vueltas a los segmentos, de forma tal que sus extremos sin bisagras se junten sin quedar completamente planos. Esto es posible sólo si la longitud combinada de los dos segmentos es mayor que la longitud del tercer segmento.




Imagina que dos segmentos estén conectados por una bisagra. Para formar un triángulo, necesitas poder ajustar la apertura entre estos lados, de manera que los extremos sin bisagras se junten con los extremos del tercer segmento, sin quedar completamente planos. Esto sólo es posible si la longitud combinada de los dos segmentos con bisagras es mayor que la longitud del tercer segmento.

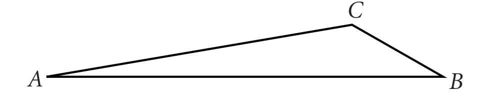



Puedes establecer esta idea como una conjetura.

**Conjetura de la desigualdad del triángulo** La suma de las longitudes de cualesquier dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del tercer lado. **C-20**

**(continúa)**

Puedes considerar la conjetura de la desigualdad del triángulo de una manera diferente: la distancia más corta entre dos puntos es la longitud del segmento que los conecta. En otras palabras, la distancia de *A* a *C* a *B* no puede ser más corta que la distancia de *A* a *B*.

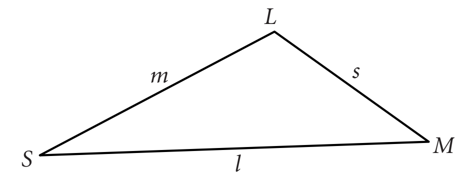



Sin importar dónde esté *C*,
$AC + CB \geq AB$.

## Investigación 2: ¿Dónde están los ángulos más grandes y más chicos?

Dibuja un triángulo obtuso escaleno. Sigue los Pasos 1 y 2 de tu libro para rotular los ángulos y lados, de acuerdo con su tamaño. Después responde a las preguntas del Paso 3.

Igual que en esta ilustración, debes encontrar que el lado más largo es opuesto al ángulo que tiene la medida más grande, el segundo lado más largo es opuesto al lado que tiene la segunda medida más grande, y el lado más corto es opuesto al lado que tiene la medida más pequeña.




Dibuja un triángulo agudo escaleno y sigue los Pasos 1–3 nuevamente. ¿Tus descubrimientos son iguales?

Expresa tus descubrimientos como una conjetura. He aquí una forma posible de formular la conjetura.

**Conjetura de la desigualdad de los ángulos y los lados** En un triángulo, si un lado es más largo que otro, entonces el ángulo opuesto al lado más largo es más grande que el ángulo opuesto al lado más corto. **C-21**

Hasta ahora, te has concentrado en los *ángulos internos* de los triángulos. Los triángulos también tienen *ángulos externos.* Para construir un **ángulo externo,** alarga un lado más allá del vértice. Cada ángulo externo de un triángulo tiene un **ángulo interno adyacente** y un par de **ángulos internos no adyacentes.**

Ángulo externo
Ángulo interno adyacente
Ángulos internos no adyacentes

## Investigación 3: Ángulos externos de un triángulo

En esta investigación buscarás una relación entre la medida de un ángulo externo y la medida de los dos ángulos internos no adyacentes asociados. Sigue los Pasos 1–3 de tu libro para al menos dos triángulos diferentes. Puedes formular tus descubrimientos como una conjetura.

**Conjetura del ángulo externo del triángulo** La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes. **C-22**




# ¿Existen medios rápidos para determinar la congruencia?

En esta lección

- Buscarás unos medios rápidos para determinar si dos triángulos son congruentes

Si los tres lados y los tres ángulos de un triángulo son congruentes con los tres lados y los tres ángulos de otro triángulo, entonces ya sabes que los triángulos son congruentes. Pero, para determinar si dos triángulos son congruentes, ¿realmente es necesario hacer todas las seis comparaciones?

En esta lección y en la siguiente, buscarás medios rápidos que te permitan determinar si dos triángulos son congruentes, haciendo solamente tres comparaciones. En la página 221 de tu libro, se ilustran las seis formas diferentes en que tres partes de un triángulo pueden ser congruentes con tres partes de otro triángulo. Observa que el orden en que las partes se enumeran es importante. Por ejemplo, Lado-Ángulo-Lado (*Side-Angle-Side:* SAS) se refiere a dos lados y al ángulo incluido *entre* los lados, mientras que Lado-Lado-Ángulo (*Side-Side-Angle:* SSA) se refiere a dos lados y a un ángulo que *no* está *entre* ellos.

## Investigación 1: ¿SSS es un medio rápido para determinar la congruencia?

En esta investigación explorarás la siguente pregunta: Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro triángulo, ¿deben ser congruentes los triángulos? En otras palabras, ¿Lado-Lado-Lado (*Side-Side-Side:* SSS) es un medio rápido para determinar la congruencia?

Sigue el Paso 1 de tu libro para construir un triángulo usando como lados los tres segmentos dados. Ahora trata de construir un triángulo *diferente* usando los tres segmentos como lados. ¿Puedes hacerlo? (Para determinar si dos triángulos son iguales o distintos, puedes colocar uno encima del otro para ver si coinciden.)

Debes encontrar que sólo puedes hacer un triángulo a partir de los tres segmentos. De hecho, si se te dan *cualesquier* tres segmentos (que satisfagan la desigualdad de triángulos), podrás hacer solamente un triángulo. Es decir, cualesquier dos triángulos con las mismas longitudes laterales deben ser congruentes. Puedes formular esta observación como una conjetura.

**Conjetura de congruencia SSS** Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes. **C-23**

## Investigación 2: ¿SAS es un medio rápido para determinar la congruencia?

A continuación considerarás el caso Lado-Ángulo-Lado (*Side-Angle-Side:* SAS). Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con dos lados y con el ángulo incluido de otro, ¿deben ser congruentes los triángulos?

Sigue el Paso 1 de tu libro para construir un triángulo a partir de las tres partes dadas. Ahora trata de construir un triángulo *diferente* a partir de las mismas tres partes. ¿Puedes hacerlo? (Recuerda que el ángulo debe estar incluido *entre* los lados.)

**(continúa)**

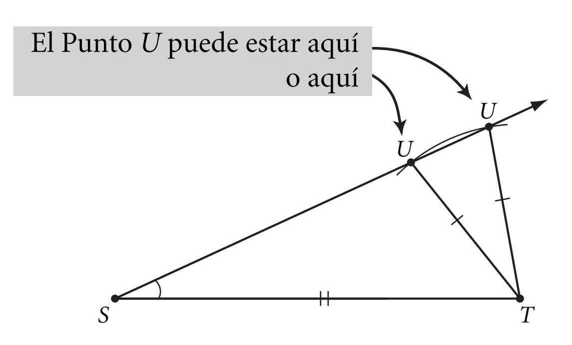
Debes encontrar que sólo puedes hacer un triángulo de las partes dadas. De hecho, si se te dan *cualesquier* dos lados y un ángulo incluido, podrás hacer solamente un triángulo. Puedes formular esta observación como una conjetura.

**Conjectura de congruencia SAS** Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con dos lados y con el ángulo incluido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes. **C-24**

## Investigación 3: ¿Es SSA un medio rápido para determinar congruencia?

En esta investigación explorarás el caso Lado-Lado-Ángulo (SSA). Si dos lados y un ángulo no incluido de un triángulo son congruentes con el ángulo y los lados correspondientes y el ángulo de otro triángulo, ¿serán congruentes los triángulos?

Sigue el Paso 1 de tu libro para construir un triángulo con las tres partes dadas. Ahora intenta construir un triángulo diferente usando los mismos dos lados y ángulo no incluido. ¿Puedes construir dos triángulos diferentes usando las mismas partes?

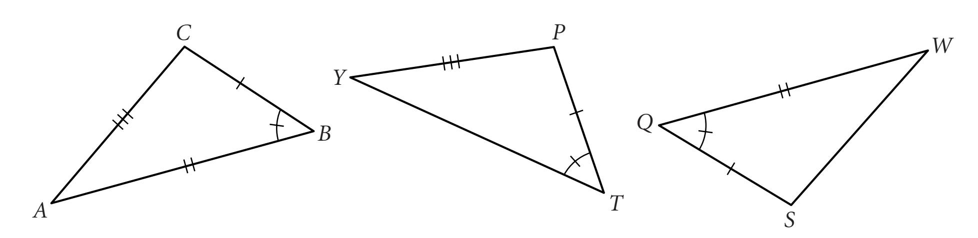



Una vez que construyas $\overline{ST}$ sobre un lado de $\angle S$, hay dos ubicaciones posibles para el punto *U* del otro lado del ángulo.

Puedes enunciar esta observación en una conjetura: Si dos lados y un ángulo no incluido de un triángulo son congruentes con los dos lados correspondientes y el ángulo no incluido de otro triángulo, entonces los triángulos no son necesariamente congruentes.

Aquí hay un ejemplo que usa las nuevas conjeturas de esta lección.

***EJEMPLO*** Usando *solamente* la información dada, determina cuáles de los siguientes triángulos son congruentes e indica qué medios rápidos de congruencia usaste.




▶ ***Solución*** Como $\overline{AB} \cong \overline{WQ}$, $\angle B \cong \angle Q$, y $\overline{BC} \cong \overline{QS}$, $\triangle ABC \cong \triangle WQS$ según SAS.

Aunque $\overline{BC} \cong \overline{TP}$, $\overline{PY} \cong \overline{CA}$ y $\angle B \cong \angle T$, no puedes concluir que $\triangle ABC \cong \triangle TPY$, porque SSA no es un medio rápido para determinar la congruencia.

En cuanto a $\triangle TPY$ y $\triangle QSW$, sólo sabes que $\angle Q \cong \angle T$ y $\overline{QS} \cong \overline{TP}$. Ésta no es suficiente información para concluir que los triángulos son congruentes.




# ¿Existen otros medios rápidos para determinar la congruencia?

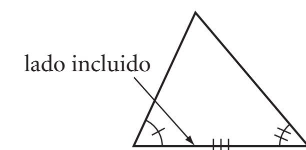
En esta lección

- Buscarás más medios rápidos para determinar si dos triángulos son congruentes

En la Lección 4.4, viste que hay seis formas en las que tres partes de un triángulo pueden ser congruentes con tres partes de otro, e investigaste tres de estos casos. Aprendiste los siguientes medios rápidos para determinar la congruencia.

- SSS: Si tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.
- SAS: Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con dos lados y el ángulo incluido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

También aprendiste que si sabes que dos lados y un ángulo no incluido de un triángulo son congruentes con dos lados correspondientes y el ángulo no incluido de otro, entonces los triángulos no son necesariamente congruentes. Ahora explorarás los tres casos restantes.




Un lado ubicado entre dos ángulos dados de un triángulo se llama lado incluido, come se observa en el diagrama a la derecha.

## Investigación 1: ¿ASA es un medio rápido para determinar la congruencia?

En esta investigación explorarás el caso Ángulo-Lado-Ángulo (ASA). Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado incluido de otro, ¿deben ser congruentes los triángulos?

Sigue el Paso 1 de tu libro para construir un triángulo usando las tres partes dadas.

Ahora trata de construir un triángulo *diferente* usando las tres partes. ¿Puedes hacerlo? (Recuerda que para determinar si dos triángulos son diferentes o el mismo triángulo, puedes colocar uno encima de otro para ver si coinciden.)

Debes encontrar que sólo puedes hacer un triángulo a partir de las tres partes dadas. De hecho, si se te dan cualesquier dos ángulos y un lado incluido, sólo podrás hacer un triángulo. Puedes formular este hecho como una conjetura.

**Conjectura de congruencia ASA** Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado incluido de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes. **C-25**

Ahora toma en consideración el Lado-Ángulo-Ángulo (SAA), donde el lado no está incluido entre los dos ángulos.

**(continúa)**

## Investigación 2:

Sigue el Paso 1 de tu libro para construir un triángulo de las tres partes dadas. Ahora intenta construir un triángulo diferente usando las mismas tres partes. ¿Puedes hacerlo?

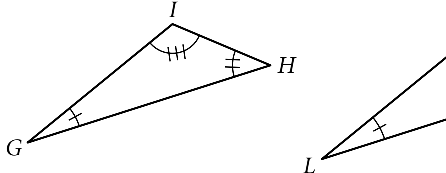
Deberías hallar que sólo puedes hacer un triángulo cuando te dan dos ángulos y un lado no incluido. Ahora puedes enunciar la siguiente conjetura:

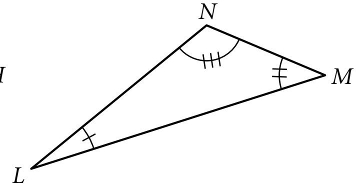
**Conjectura de congruencia SAA** Si dos ángulos y un lado no incluido de un triángulo son congruentes con los ángulos correspondientes y el lado de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes. **C-26**

## Investigación 3: ¿Es AAA un medio rápido para determinar congruencia de triángulos?

Finalmente explorarás el caso Ángulo-Ángulo-Ángulo (AAA). Construye un triángulo con los tres ángulos dados en tu libro. Ahora intenta construir un triángulo diferente usando los mismos tres ángulos. ¿Puedes hacerlo?

Como no se han dado las longitudes de los lados, puedes hacer el primer lado de la longitud que quieras. Al usar diferentes longitudes en tu segundo triángulo, obtienes un triángulo de diferente tamaño.



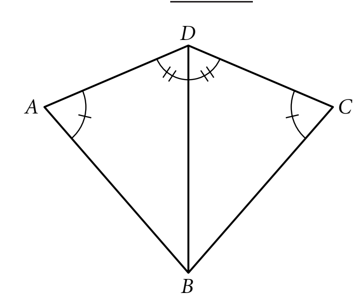

Ahora puedes enunciar la siguiente conjetura. Si tres ángulos de un triángulo son congruentes a los tres ángulos de otro triángulo, entonces los dos triángulos no son necesariamente congruentes.

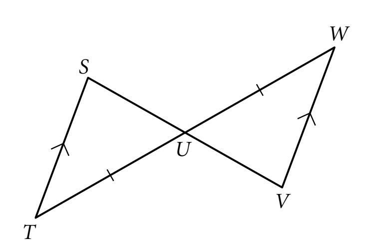
En las últimas dos lecciones, has encontrado que SSS, SAS, ASA, y SAA son todos medios rápidos para determinar la congruencia. Añade estas conjeturas de congruencia a tu lista de conjeturas. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO***

Completa cada proposición y especifica qué medio rápido usaste para determinar que los triángulos son congruentes. Si los triángulos no se ven congruentes, escribe "no se puede determinar".

**a.** $\triangle ADB \cong \triangle$______ **b.** $\triangle STU \cong \triangle$______ **c.** $\triangle EFX \cong \triangle$______




▶ ***Solución***

**a.** Como $\angle A \cong \angle C$, $\angle ADB \cong \angle CDB$, y $\overline{BD} \cong \overline{BD}$, $\triangle ADB \cong \triangle CDB$ según SAA.

**b.** También podrías razonar que, como $\overline{ST}$ y $\overline{WV}$ son paralelos, $\angle S \cong \angle V$ y $\angle T \cong \angle W$. Se establece que $\overline{TU} \cong \overline{WU}$. Por lo tanto, $\triangle STU \cong \triangle VWU$, según SAA, de modo que $\angle SUT \cong \angle VUW$ porque son ángulos opuestos por el vértice. $\angle T \cong \angle W$ porque $\overline{ST}$ y $\overline{WV}$ son paralelos. Se establece que $\overline{TU} \cong \overline{WU}$. Por lo tanto, $\triangle STU \cong \triangle VWU$, según ASA.

**c.** No se puede determinar. Como $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ son paralelos, $\angle E \cong \angle G$ y $\angle F \cong \angle H$. Sin embargo, los lados congruentes $\overline{FX}$ y $\overline{GH}$ no son correspondientes. Entonces, no hay suficiente información para mostrar que los dos triángulos son congruentes.




# Partes correspondientes de triángulos congruentes

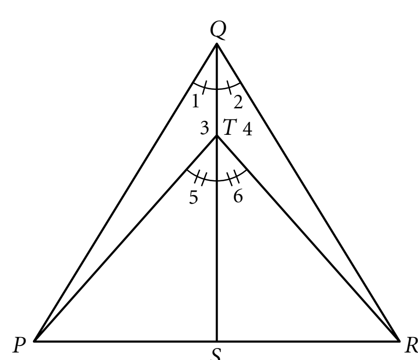
En esta lección

- Usarás el hecho de que las partes correspondientes de los triángulos congruentes son congruentes para probar proposiciones
- Aprenderás unas técnicas para seguir de cerca la información cuando estés escribiendo una prueba

En las Lecciones 4.4 y 4.5 descubriste cuatro medios rápidos para mostrar que dos triángulos son congruentes: SSS, SAS, ASA y SAA. Una vez que hayas establecido que dos triángulos son congruentes, sabes que sus partes correspondientes son congruentes. Usaremos la abreviatura CPCTC para la proposición *partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes* (*corresponding parts of congruent triangles are congruent*).

En el Ejemplo A de tu libro se emplea CPCTC para probar que dos segmentos son congruentes. Lee ese ejemplo con atencíon. Observa que el argumento explica primero por qué los *triángulos AMD* y *BMC* son congruentes, y luego usa CPCTC para explicar por qué los *lados AD* y *BC* son congruentes. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO A*** Da un argumento deductivo para explicar por qué $\overline{PT} \cong \overline{RT}$.



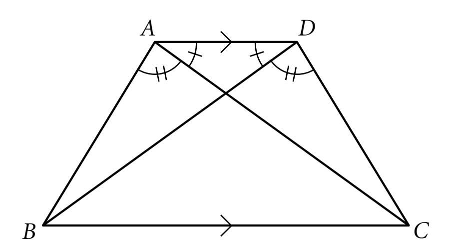

***Solución*** Primero, demostrarás que $\triangle PQT \cong \triangle RQT$ y después usarás CPCTC para demostrar que $\overline{PT} \cong \overline{RT}$. Se establece que $\angle 1 \cong \angle 2$. También sabes que $\overline{QT} \cong \overline{QT}$ porque son el mismo segmento. Ahora, como $\angle 3$ y $\angle 5$ son un par lineal, $m\angle 3 + m\angle 5 = 180°$, o de manera equivalente, $m\angle 3 = 180° - m\angle 5$. Como $\angle 5 \cong \angle 6$, puedes sustituir $m\angle 5$ por $m\angle 6$, para obtener $m\angle 3 = 180° - m\angle 6$.

Sin embargo, $\angle 4$ y $\angle 6$ forman un par lineal, de manera que $m\angle 4$ también es igual a $180° - m\angle 6$. Por lo tanto, $m\angle 3 = m\angle 4$. Esto es, $\angle 3 \cong \angle 4$. Así pues, según ASA, $\triangle PQT \cong \triangle RQT$. Como los triángulos son congruentes, $\overline{PT} \cong \overline{RT}$ según CPCTC.

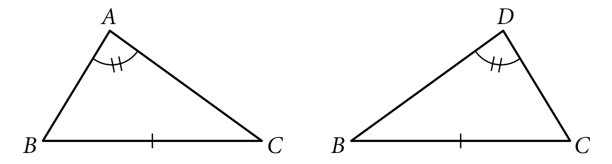
Cuando tratas de probar que los triángulos son congruentes, puede ser difícil seguir la información de cerca. Asegúrate de señalar toda la información en la figura. Si es difícil ver los triángulos, puedes dibujarlos con distintos colores o volverlos a dibujar por separado. Estas técnicas se muestran en el Ejemplo B de tu libro. Lee ese ejemplo y asegúrate de comprenderlo. Después lee el ejemplo siguiente.

**(continúa)**

***EJEMPLO B*** ¿$\overline{AC} \cong \overline{DB}$? Escribe una prueba de párrafo explicando las razones.




▶ ***Solución*** Puedes dibujar los triángulos $ABC$ y $DCB$ de manera separada, para verlos con mayor claridad. Al ir descubriendo más información, señálala en el diagrama original y en los triángulos separados.




**Prueba de párrafo:** Demuestra que $\overline{AC} \cong \overline{DB}$.

$\angle BAC \cong \angle CDB$. Asimismo, $\overline{BC} \cong \overline{CB}$ porque son el mismo segmento. Como $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, los ángulos alternos internos son congruentes. Por lo tanto, $\angle ACB \cong \angle DAC$ y $\angle ADB \cong \angle DBC$. Como se ha establecido que $\angle DAC \cong \angle ADB$, también debe ser cierto que $\angle ACB \cong \angle DBC$. (Marca esta información en los diagramas.) $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, según SAA. Según CPCTC, $\overline{AC} \cong \overline{DB}$.




# Razonamiento de organigrama

En esta lección

- Escribirás **pruebas de organigrama**

Hasta ahora has escrito las explicaciones en forma de argumento deductivo o pruebas de párrafo. El Ejemplo A de tu libro muestra una prueba de párrafo. Lee este ejemplo y asegúrate de que comprendes la prueba.

Cuando un argumento lógico es complejo o incluye muchos pasos, es posible que una prueba de párrafo no sea la forma más clara para presentar los pasos. En tales casos, a menudo resulta útil organizar los pasos en forma de un *organigrama* (*flowchart*). Un **organigrama** es una manera visual de organizar todos los pasos de un procedimiento complicado, en el orden correcto. Los pasos del procedimiento se escriben en cajas. Las flechas conectan las cajas para mostrar cómo los hechos conducen a conclusiones.

La creación de una **prueba de organigrama** hace evidente tu lógica, de manera que otros puedan seguir tu razonamiento. El Ejemplo B de tu libro presenta el argumento del Ejemplo A en forma de organigrama. Lee la prueba atentamente. Observa que cada proposición se escribe dentro de una caja y que la razón lógica de cada paso se escribe debajo de esta caja.

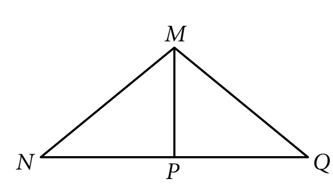
En los ejemplos siguientes se dan más pruebas de organigrama. En cada ejemplo, trata de escribir una prueba por tu cuenta antes de mirar la solución. Recuerda que a menudo existen muchas formas de probar una proposición. Tu prueba puede ser diferente que la mostrada.

***EJEMPLO A***

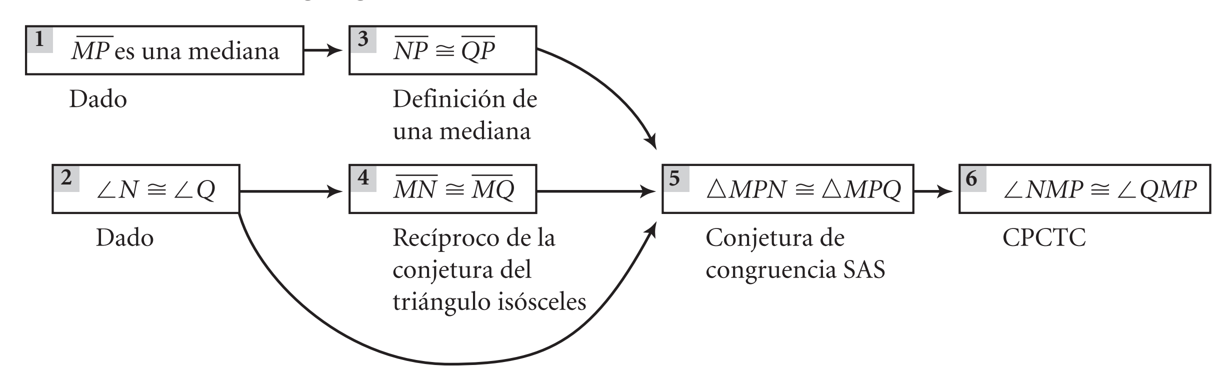
**Dado:** $\overline{MP}$ es una mediana

$\angle N \cong \angle Q$

**Demuestra:** $\angle NMP \cong \angle QMP$




▶ ***Solución*** **Prueba de organigrama**



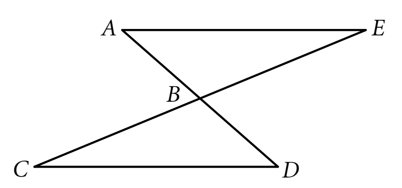

**(continúa)**

***EJEMPLO B***

**Dado:** $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$

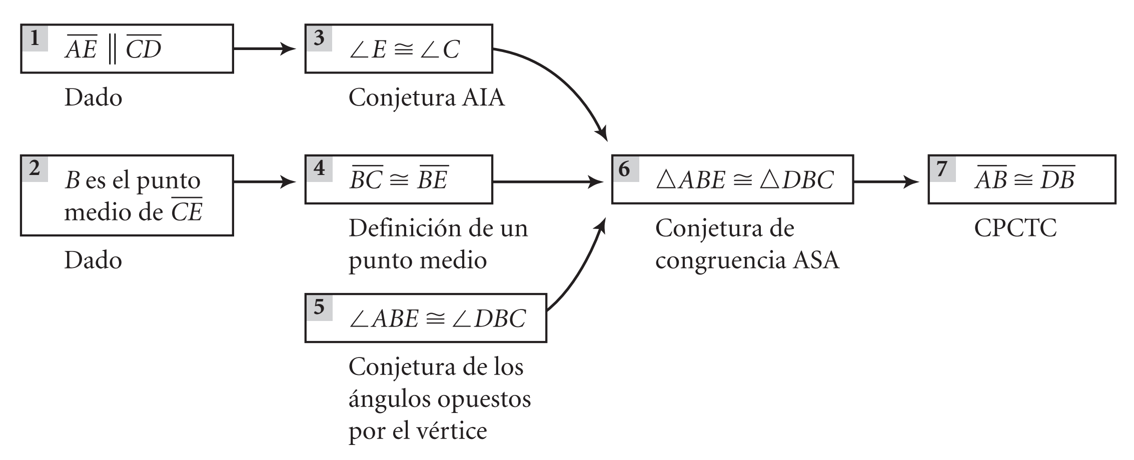
$B$ es el punto medio de $\overline{CE}$

**Demuestra:** $\overline{AB} \cong \overline{DB}$




▶ ***Solución***

**Prueba de organigrama**

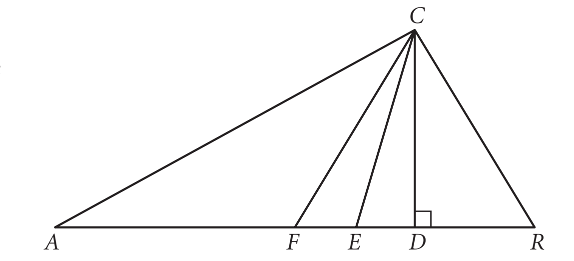





# Pruebas de las conjeturas sobre el triángulo especial

En esta lección

- Harás una conjetura sobre la bisectriz del ángulo del vértice en un triángulo isósceles
- Harás y probarás una conjetura sobre los triángulos equiláteros
- Conocerás las conjeturas **bicondicionales**




En $\triangle ARC$, $\overline{CD}$ es la altitud a la base $\overline{AR}$, $\overline{CE}$ es la bisectriz de $\angle ACR$, y $\overline{CF}$ es la mediana del lado $\overline{AR}$. Este ejemplo ilustra que la bisectriz de ángulo, la altitud, y la mediana pueden ser diferentes segmentos. ¿Siempre es cierto esto? ¿Pueden ser todas el mismo segmento? En la investigación explorarás estas cuestiones.

## Investigación: La recta de simetría en un triángulo isósceles

Construye un triángulo isósceles grande en una hoja de papel no rayado. Rotúlalo *ARK*, donde *K* es el ángulo del vértice.

Construye una bisectriz de ángulo $\overline{KD}$, con el punto *D* sobre $\overline{AR}$. Compara $\triangle ADK$ con $\triangle RDK$. ¿Parecen congruentes?

Usa tu compás para comparar $\overline{AD}$ y $\overline{RD}$. ¿Son congruentes? Si es así, entonces *D* es el punto medio de $\overline{AR}$ y por lo tanto, $\overline{KD}$ es la mediana de $\overline{AR}$. Observa que $\angle ADK$ y $\angle RDK$ son un par lineal y por lo tanto son suplementarios. Ahora compara $\angle ADK$ y $\angle RDK$. ¿Son congruentes los ángulos? Si es así, ¿cuál debe ser la medida de cada ángulo? ¿Qué te dice esto respecto a $\overline{KD}$ y $\overline{AR}$?

Tus resultados deben conducir a la siguiente conjetura.




**Conjetura de la bisectriz del ángulo del vértice** En un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo del vértice también es la altitud y la mediana de la base.

En el Capítulo 3, descubriste que si un triángulo es equilátero, entonces cada ángulo mide 60°. Por lo tanto, si un triángulo es equilátero, entonces es equiangular. Esto se llama la conjetura del triángulo equilátero. En la página 245 de tu libro, se da una prueba de esta proposición. Lee esta prueba atentamente y asegúrate de que comprendes cada paso. El *recíproco* de esta proposición también es cierto. Esto es, si un triángulo es equiangular, entonces es equilátero. La siguiente conjetura combina estas ideas.




**Conjetura del triángulo equilátero/equiangular** Todo triángulo equilátero es equiangular, y recíprocamente, todo triángulo equiangular es equilátero.

**(continúa)**

Una conjetura **bicondicional** es una conjetura en la cual una de las condiciones no puede ser cierta a menos de que la otra también sea cierta. En otras palabras, tanto el enunciado como su recíproco son ciertos. La conjetura de triángulo equilátero y equiángulo es bicondicional y por eso puede escribirse: Un triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo.

Aquí hay un ejemplo que usa las nuevas conjeturas.

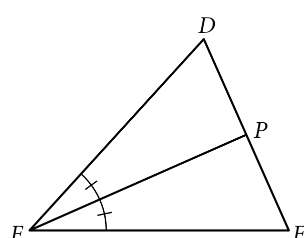
***EJEMPLO*** $\triangle DEF$ es isósceles, siendo $\overline{DF} \cong \overline{EF}$.

**a.** $m\angle D = 67°$

$DE = 15$ cm

$m\angle DFP =$ ______

$DP =$ ______




**b.** $m\angle DFE = 54°$

$DP = 7$ cm

$m\angle DFP =$ ______

$DE =$ ______

► ***Solución***

**a.** Si $m\angle D = 67°$, entonces $m\angle E = 67°$ porque $\angle D$ y $\angle E$ son ángulos de la base de un triángulo isósceles. Por lo tanto, $m\angle DFE = 180° - (67° + 67°) = 46°$. Como $\overline{FP}$ biseca a $\angle DFE$, $m\angle DFP = \frac{1}{2}(46°) = 23°$.

Como $\overline{FP}$ biseca al ángulo del vértice $DFE$, también debe ser la mediana de $\overline{DE}$. Por lo tanto, $DP = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}(15 \text{ cm}) = 7.5$ cm.

**b.** Como $\overline{FP}$ es la altitud de $\overline{DE}$, también debe ser la bisectriz del ángulo del vértice $DFE$. Por lo tanto, $m\angle DFP = \frac{1}{2}(m\angle DFE) = \frac{1}{2}(54°) = 27°$.

Como $\overline{FP}$ biseca al ángulo del vértice $DFE$, también debe ser la mediana de $\overline{DE}$. Por lo tanto, $DE = 2DP = 2(7 \text{ cm}) = 14$ cm.




# Conjetura de la suma de los ángulos de un polígono

En esta lección

- Descubrirás una fórmula para encontrar la **suma de las medidas de los ángulos** de cualquier **polígono**
- Usarás el **razonamiento deductivo** para explicar por qué funciona la fórmula para la suma de los ángulos de un polígono

Hay triángulos de muchas formas y tamaños distintos. Sin embargo, como descubriste en el Capítulo 4, la suma de las medidas de los ángulos de cualquier triángulo es 180°. En esta lección investigarás la suma de las medidas de los ángulos de otros polígonos. Después de encontrar un patrón, escribirás una fórmula que relaciona el número de los lados de un polígono a la suma de las medidas de sus ángulos.

## Investigación: ¿Existe una fórmula para la suma de los ángulos de un polígono?

Dibuja tres cuadriláteros diferentes. En cada cuadrilátero, mide cuidadosamente los cuatro ángulos y halla la suma de las medidas de los ángulos. Si mides cuidadosamente, debes encontrar que todos tus cuadriláteros tienen la misma suma de los ángulos. ¿Cuál es esta suma? Anótala en una tabla similar a ésta.

| Número de lados | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | . . . | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Suma de las medidas de los ángulos | 180° | | | | 900° | 1080° | | |

A continuación dibuja tres pentágonos diferentes. Mide cuidadosamente los ángulos de cada pentágono, y halla la suma de los ángulos. Nuevamente, debes encontrar que la suma de los ángulos es igual para cada pentágono. Anota la suma en la tabla.

Usa tus descubrimientos para completar las siguientes conjeturas.

**Conjetura de la suma de los ángulos de un cuadrilátero** La suma de las medidas de los cuatro ángulos de cualquier cuadrilátero es _______________. **C-29**

**Conjetura de la suma de los ángulos de un pentágono** La suma de las medidas de los cinco ángulos de cualquier pentágono es _______________. **C-30**

Ahora dibuja dos hexágonos y halla la suma de sus ángulos. Anótala en la tabla.

Las sumas de los ángulos de los heptágonos y octágonos ya están en la tabla, pero puedes verificar las sumas dibujando y midiendo tus propios polígonos.

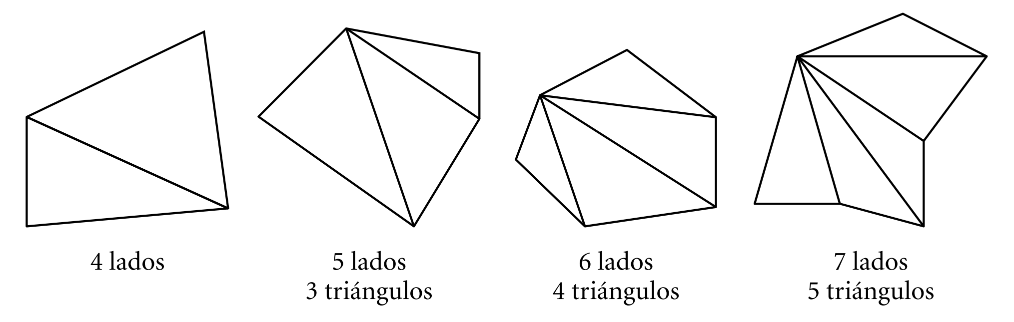
Busca un patrón en la tabla completa. Halla una fórmula general para la suma de las medidas de los ángulos de un polígono, en términos del número de lados, $n$. (*Sugerencia*: usa lo que aprendiste en el Capítulo 2 respecto a la fórmula para un patrón con una diferencia constante.) Después completa esta conjetura.



**Conjetura de la suma de los ángulos de un polígono** La suma de las medidas de los $n$ ángulos internos de un $n$-ágono es ___________________. **C-31**

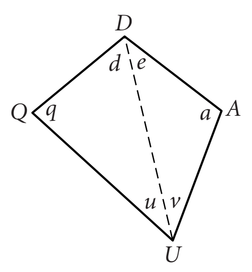
(continúa)

Puedes usar el razonamiento deductivo para ver por qué tu fórmula funciona. En cada uno de los polígonos siguientes, se han dibujado todas las diagonales a partir de un vértice, creando triángulos. Observa que en cada polígono, hay 2 triángulos menos que el número de lados.




El cuadrilátero se ha dividido en dos triángulos, cada uno con una suma de ángulos de 180°. Por lo tanto, la suma de los ángulos del cuadrilátero es $180° \cdot 2$, ó 360°. El pentágono se ha dividido en tres triángulos, de manera que la suma de los ángulos es $180° \cdot 3$, ó 540°. Las sumas de los ángulos del hexágono y del heptágono son $180° \cdot 4$ y $180° \cdot 5$, respectivamente. En general, si un polígono tiene $n$ lados, la suma de sus ángulos es $180°(n - 2)$ ó, de manera equivalente, $180°n - 360°$. Esto debe concordar con la fórmula que ya hallaste.

Puedes usar el diagrama a la derecha para escribir una prueba de párrafo de la conjetura de la suma de los ángulos de un cuadrilátero. Trata de completar los pasos de la siguiente prueba.



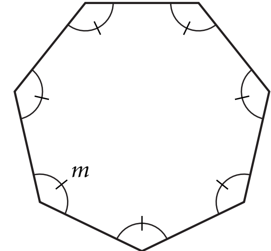

**Prueba de párrafo:** Demuestra que $m\angle Q + m\angle U + m\angle A + m\angle D = 360°$.

$q + d + u = 180°$ y $e + a + v = 180°$ según la conjetura ________________.
Según la propiedad aditiva de la igualdad, $q + d + u + e + a + v =$ ________.
Por lo tanto, la suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero es 360°.

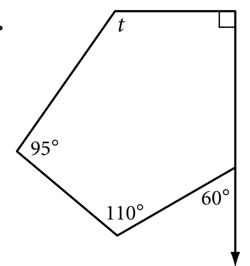
He aquí un ejemplo que utiliza tus nuevas conjeturas.

***EJEMPLO*** Encuentra las medidas de los ángulos rotulados con letras.

**a.**




**b.**




▶ ***Solución***

**a.** El polígono tiene siete lados, y por eso la suma de los ángulos es $180° \cdot 5$, ó 900°. Como todos los ángulos tienen la misma medida, la medida del ángulo $m$ es $900° \div 7$, ó aproximadamente 128.6°.

**b.** El polígono tiene cinco lados, y por eso la suma de los ángulos es $180° \cdot 3$, ó 540°. Por lo tanto, $90° + 120° + 110° + 95° + t = 540°$. Si resolvemos para $t$, se obtiene $t = 125°$.

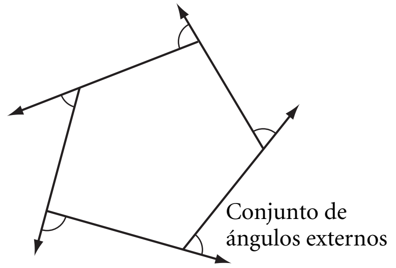



# Ángulos externos de un polígono

En esta lección

- Encontrarás la suma de las medidas de un conjunto de **ángulos externos** de un polígono
- Derivarás dos fórmulas para la medida de cada ángulo de un polígono equiangular

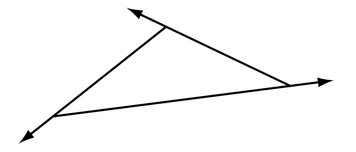
En la Lección 5.1, descubriste una fórmula para la suma de las medidas de los ángulos *internos* de cualquier polígono. En esta lección, encontrarás una fórmula para la suma de las medidas de un conjunto de ángulos *externos*.




Para crear un conjunto de ángulos externos de un polígono extiende cada lado del polígono para formar un ángulo externo en cada vértice.

## Investigación: ¿Existe una suma de ángulos externos?

Dibuja un triángulo y extiende sus lados para formar un conjunto de ángulos externos.



Mide dos de los ángulos *internos* de tu triángulo. Después usa la conjetura de la suma de los ángulos de un triángulo para encontrar la medida del ángulo restante. Rotula cada ángulo de tu triángulo con su medida.

Usa la conjetura del par lineal para calcular la medida de cada ángulo externo. Después halla la suma de las medidas de los ángulos externos. Anota tu resultado en una tabla similar a la siguiente. ¿Crees que obtendrías el mismo resultado con un triángulo diferente? Dibuja otro triángulo y observa.

| **Número de lados** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | . . . | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Suma de las medidas de los ángulos externos** | 360° | | | | | | . . . | |

A continuación dibuja un cuadrilátero y crea un conjunto de ángulos externos. Usa un procedimiento similar al que usaste para los triángulos, para hallar la suma del conjunto de ángulos externos. Agrega tu resultado a la tabla.

Ahora encuentra la suma de los ángulos externos para un pentágono. ¿Comienzas a ver un patrón? Prognostica la suma de las medidas de los ángulos externos para un hexágono. Después dibuja un hexágono y verifica tu predicción. Agrega tus resultados a la tabla.

Debes haber descubierto que, sin importar cuántos lados tenga un polígono, la suma de las medidas de sus ángulos externos es 360°. Esto puede formularse como una conjetura.

**Conjetura de la suma de los ángulos externos** La suma de las medidas de un conjunto de ángulos externos de cualquier polígono es 360°. **C-32**

**(continúa)**

Mira la construcción hecha por computadora en la página 263 de tu libro. Observa que los ángulos externos se mantienen igual al mismo tiempo que el polígono se encoge, hasta convertirse en un punto. ¿Cómo muestra esto la conjetura de la suma de los ángulos externos?

Ahora encontrarás dos fórmulas para medir cada ángulo *interno* de un polígono equiangular con $n$ lados. Recuerda, un polígono equiangular es un polígono en el que todos sus ángulos tienen la misma medida.

Puedes usar la conjetura de la suma de los ángulos de un polígono para derivar la primera fórmula. Dicha conjetura establece que la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono con $n$ lados es $180°(n - 2)$. Si el polígono es equiangular, entonces cada uno de los $n$ ángulos tiene la misma medida. Usa estos hechos para escribir una fórmula para medir cada ángulo.

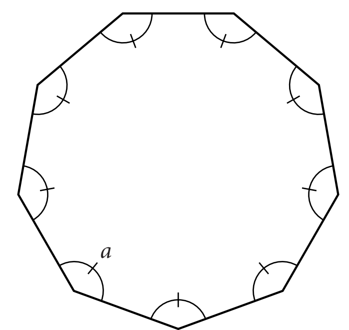
Para derivar la segunda fórmula, puedes usar la conjetura de la suma de los ángulos externos. De acuerdo con esa conjetura, la suma de las medidas de los $n$ ángulos externos de un polígono es 360°. En un polígono equiangular, cada uno de los ángulos externos tiene la misma medida. Así pues, la medida de cada ángulo externo es $\frac{360°}{n}$. Si cada ángulo externo mide $\frac{360°}{n}$, ¿cuál debe ser la medida de cada ángulo interno?

Puedes establecer tus descubrimientos en una conjetura.

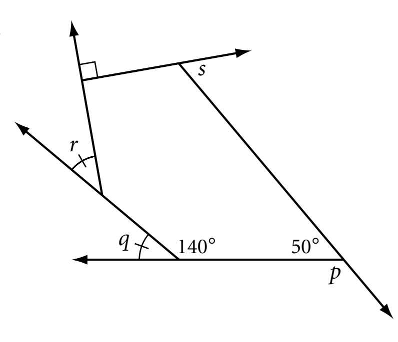
**Conjetura del polígono equiangular** Puedes encontrar la medida de cada ángulo interno de un $n$-ágono equiangular, usando cualquiera de estas fórmulas: $180° - \frac{360°}{n}$ ó $\frac{180°(n - 2)}{n}$. **C-33**

***EJEMPLO*** Encuentra las medidas de los ángulos señalados con letras.

**a.**




**b.**




▶ ***Solución***

**a.** Éste es un 9-ágono equiángulo. Puedes usar la conjetura del polígono equiangular para encontrar la medida de $a$.

$$a = 180° - \frac{360°}{9} = 180° - 40° = 140°$$

**b.** Según la conjetura del par lineal, $p = 130°$ y $q = 40°$, así que $r = 40°$ también. Para hallar $s$, usa la conjetura de la suma de los ángulos externos.

$$130° + 40° + 40° + 90° + s = 360°$$

La solución de esta ecuación da $s = 60°$.

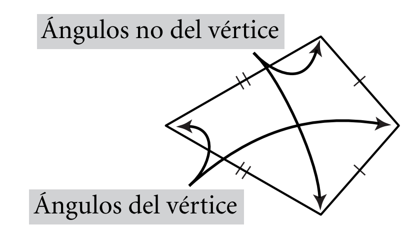



# Propiedades de los trapecios y los papalotes

En esta lección

- Investigarás las propiedades de los **papalotes**
- Investigarás las propiedades de los **trapecios** y los **trapecios isósceles**

En esta lección examinarás dos tipos especiales de cuadriláteros, los papalotes y los trapecios. Recuerda que un **papalote** es un cuadrilátero con dos distintos pares de lados consecutivos congruentes.




Puedes hacer un papalote construyendo dos triángulos isósceles diferentes en lados opuestos de una base común y después quitando la base. En un triángulo isósceles, el ángulo entre los dos lados congruentes se llama el ángulo del vértice. Por esta razón, llamaremos a los ángulos entre los pares de lados congruentes de un papalote los **ángulos del vértice.** Nos referiremos a los otros dos ángulos como los **ángulos no del vértice.**

Un papalote tiene una recta de simetría de reflexión, al igual que un triángulo isósceles. Puedes usar esta propiedad para descubrir otras propiedades de los papalotes.

### Investigación 1: ¿Cuáles son algunas propiedades de los papalotes?

Sigue el Paso 1 de tu libro para construir un papalote en *patty paper*.

Compara cada ángulo con el ángulo opuesto, doblando el papel. ¿Cuáles ángulos son congruentes: los ángulos del vértice o los ángulos no del vértice? Usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.

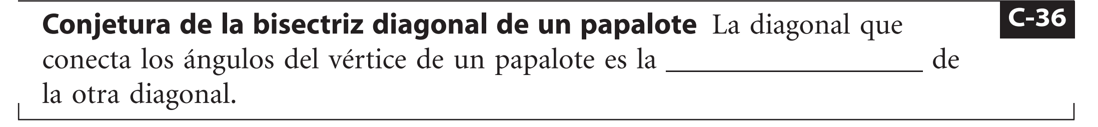
**Conjetura de los ángulos de un papalote** Los ángulos ____________________ de un papalote son congruentes. **C-34**

Dibuja las diagonales del papalote. Dobla el papalote a lo largo de una de las diagonales. Las dos partes de la otra diagonal deberían coincidir. ¿Qué puedes concluir sobre el ángulo entre las diagonales? Ahora estás listo para completar la conjetura.



**Conjetura de las diagonales de un papalote** Las diagonales de un papalote son ____________________. **C-35**

Ahora dobla sobre cada diagonal y compara las longitudes de los segmentos sobre las diagonales. ¿Alguna diagonal biseca a la otra? Completa esta conjetura.



**Conjetura de la bisectriz diagonal de un papalote** La diagonal que conecta los ángulos del vértice de un papalote es la ____________________ de la otra diagonal. **C-36**

Dobla el papel a lo largo de la diagonal que conecta los ángulos del vértice. ¿La diagonal biseca a los ángulos del vértice? Ahora dobla a lo largo de la otra diagonal. ¿Ésta biseca a los ángulos no del vértice? Completa esta conjetura.

(continúa)

**C-37**

**Conjetura de la bisectriz de ángulos de un papalote** Los ángulos __________________ de un papalote son bisecados por una diagonal.

Ahora explorarás algunas propiedades de los trapecios. Recuerda que un **trapecio** es un cuadrilátero con exactamente un par de lados paralelos. Los lados paralelos se llaman las **bases.** Un par de ángulos que comparten una base como lado común se llaman los **ángulos de la base.**

Par de ángulos de la base

Bases

Par de ángulos de la base

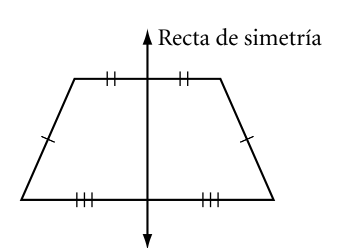
## Investigación 2: ¿Cuáles son algunas propiedades de los trapecios?

Sigue los Pasos 1 y 2 de tu libro. Después, completa esta conjetura.

**C-38**

**Conjetura de los ángulos consecutivos de un trapecio** Los ángulos consecutivos que están entre las bases de un trapecio son ________________.

Un **trapecio isósceles** es un trapecio cuyos lados no paralelos son de la misma longitud. Un trapecio isósceles tiene una recta de simetría que pasa por los puntos medios de las dos bases.




Usa los dos lados de tu regla no graduada para dibujar unos segmentos paralelos. Para construir los lados congruentes, traza arcos idénticos, centrados en los extremos de uno de los segmentos, de manera que cada arco interseque al otro segmento. Después conecta los puntos, como se muestra a continuación, para formar el trapecio.



Mide cada par de ángulos de la base. ¿En qué se distinguen los ángulos de cada par?

**C-39**

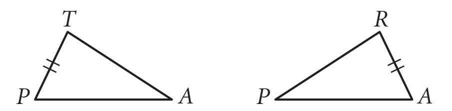
**Conjetura del trapecio isósceles** Los ángulos de la base de un trapecio isósceles son __________________.

Ahora dibuja las dos diagonales. Compara sus longitudes y completa esta conjetura.

**C-40**

**Conjetura de las diagonales de un trapecio isósceles** Las diagonales de un trapecio isósceles son __________________.

Sigue las instrucciones de la prueba de desarrollo de la página 271 de tu libro y completa una prueba de organigrama de la conjetura de las diagonales de un trapecio isósceles usando la conjetura del trapecio isósceles. Separa los triángulos y no te olvides de marcar las partes congruentes en tu diagrama.






# Propiedades de los segmentos medios

En esta lección

- Descubrirás las propiedades del **segmento medio** de un **triángulo**
- Descubrirás las propiedades del **segmento medio** de un **trapecio**

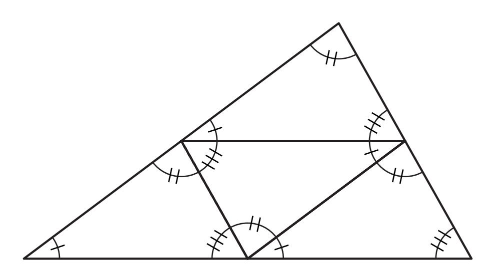
En el Capítulo 3 aprendiste que un *segmento medio* de un triángulo es un segmento que conecta los puntos medios de dos lados. En esta lección investigarás las propiedades de los segmentos medios.

## Investigación 1: Propiedades del segmento medio de un triángulo

Sigue los Pasos 1–3 de tu libro. Tus conclusiones deben llevarte a la siguiente conjetura.

**Conjetura de los tres segmentos medios** Los tres segmentos medios de un triángulo lo dividen en cuatro triángulos congruentes. **C-41**

Señala todos los ángulos congruentes de tu triángulo, como se muestra en este ejemplo.



Fíjate en uno de los segmentos medios y en el tercer lado del triángulo (el lado que no interseca al segmento medio). Observa los pares de ángulos alternos internos y de ángulos correspondientes asociados con estos segmentos. ¿A qué conclusión puedes llegar? Observa los ángulos asociados con cada uno de los otros segmentos medios y el tercer lado correspondiente.

Ahora compara la longitud de cada segmento medio con la longitud del tercer lado correspondiente. ¿Qué relación hay entre las longitudes?

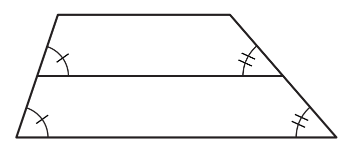
Formula tus descubrimientos en forma de conjetura.

**Conjetura del segmento medio de un triángulo** Un segmento medio de un triángulo es ___________________ al tercer lado y ___________________ la longitud del tercer lado. **C-42**

El segmento medio de un trapecio es el segmento que conecta los puntos medios de los lados no paralelos.

## Investigación 2: Propiedades del segmento medio de un trapecio

Sigue los Pasos 1–3 de tu libro. Debes encontrar que los ángulos de la base del trapecio son congruentes con los ángulos correspondientes del segmento medio. ¿Qué puedes concluir en cuanto a la relación entre el segmento medio y las bases?



**(continúa)**

Ahora sigue los Pasos 5–7. Debes encontrar que el segmento medio cabe dos veces en el segmento que representa la suma de las dos bases. Es decir, la longitud del segmento medio es la mitad de la suma de las longitudes de las dos bases. En otras palabras, la longitud del segmento medio es el promedio de las longitudes de las bases.

Usa lo que has aprendido sobre el segmento medio de un trapecio para completar esta conjetura.

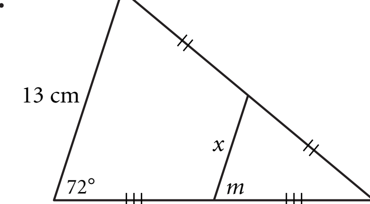
**Conjetura del segmento medio de un trapecio** El segmento medio de un trapecio es ___________________ a las bases e igual en longitud al ___________________. **C-43**

Lee el texto que viene después de la investigación en la página 277 de tu libro y estudia la construcción hecha por computadora. Asegúrate de que comprendes la relación existente entre las conjeturas de los segmentos medios del trapecio y del triángulo.

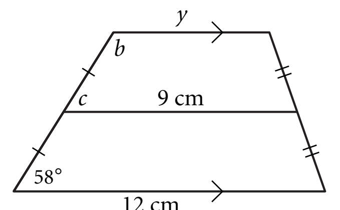
Intenta hacer el siguiente ejemplo antes de revisar la solución.

***EJEMPLO*** Encuentra las medidas rotuladas con letras.

**a.**




**b.**




► ***Solución***

**a.** Según la conjetura del segmento medio del triángulo, $x = \frac{1}{2}(13 \text{ cm}) = 6.5$ cm.

La conjetura del segmento medio del triángulo también te dice que el segmento medio es paralelo al tercer lado. Por lo tanto, los ángulos correspondientes son congruentes, de manera que $m = 72°$.

**b.** Según la conjetura del segmento medio del trapecio, $\frac{1}{2}(12 + y) = 9$. Si resolvemos para $y$, obtenemos $y = 6$.

La conjetura del segmento medio del trapecio también te dice que el segmento medio es paralelo a las bases. Por lo tanto, los ángulos correspondientes son congruentes, de manera que $c = 58°$.

Según la conjetura de los ángulos consecutivos del trapecio, $b + 58° = 180°$, por lo que $b = 122°$.




# Propiedades de los paralelogramos

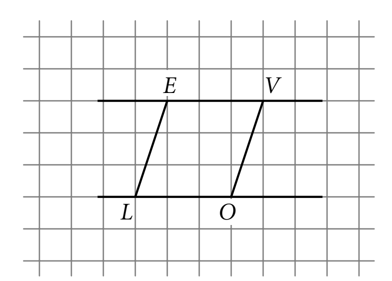
En esta lección

- Descubrirás cómo se relacionan los **ángulos** de un paralelogramo
- Descubrirás cómo se relacionan los **lados** de un paralelogramo
- Descubrirás cómo se relacionan las **diagonales** de un paralelogramo

Ya has explorado las propiedades de los papalotes y los trapecios y las de los segmentos medios de los triángulos y los trapecios. En esta lección explorarás las propiedades de los paralelogramos.

## Investigación: Cuatro propiedades de paralelogramos

Sigue las instrucciones del Paso 1 de tu libro para construir y rotular un paralelogramo.




Usa *patty paper* o un transportador para comparar las medidas de los ángulos opuestos. Después usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.

**Conjetura de los ángulos opuestos de un paralelogramo** Los ángulos opuestos de un paralelogramo son __________________. **C-44**

Los ángulos consecutivos son ángulos que comparten un lado común. En el paralelogramo *LOVE*, $\angle LOV$ y $\angle EVO$ son un par de ángulos consecutivos. Halla la suma de las medidas de cada par de ángulos consecutivos. Debes encontrar que la suma es igual para los cuatro pares. ¿Cuál es la suma? Completa esta conjetura.

**Conjetura de los ángulos consecutivos de un paralelogramo** Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son __________________. **C-45**

Supongamos que se te da la medida de un ángulo de un paralelogramo. Describe cómo podrías usar las anteriores conjeturas para hallar las medidas de los otros tres ángulos. Si no lo sabes, observa esta figura en particular. ¿Cuáles son los valores de *a*, *b*, y *c*? (Recuerda todas tus conjeturas de rectas paralelas.)




**(continúa)**

Usa un compás o *patty paper* para comparar las longitudes de los lados opuestos de tu paralelogramo. ¿Qué relación hay entre las longitudes? Completa esta conjetura.

**Conjetura de los lados opuestos de un paralelogramo** Los lados opuestos de un paralelogramo son ___________________. **C-46**

Ahora dibuja las diagonales de tu paralelogramo. Rotula el punto donde se intersecan las diagonales con la letra *M*. ¿Cómo se comparan *LM* y *VM*? ¿Cómo se comparan *EM* y *OM*? ¿Qué te dice esto respecto a la relación que existe entre las diagonales? Completa esta conjetura.

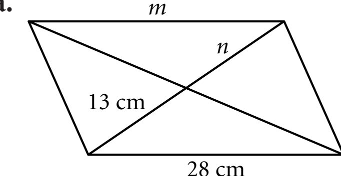
**Conjetura de las diagonales de un paralelogramo** Las diagonales de un paralelogramo ___________________ entre sí. **C-47**

De tu libro, lee el texto sobre los **vectores** que sigue a la investigación.

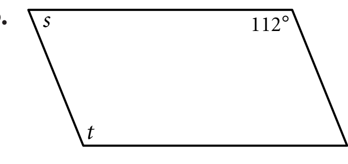
He aquí un ejemplo que usa tus nuevas conjeturas.

***EJEMPLO*** En las partes a y b, las figuras son paralelogramos. Encuentra las medidas señaladas con letras e indica las conjeturas que usaste.

**a.**




**b.**




***Solución***

**a.** Según la conjetura de los lados opuestos de un paralelogramo, $m = 28$ cm. Según la conjetura de las diagonales de un paralelogramo, $n = 13$ cm.

**b.** Según la conjetura de los ángulos opuestos de un paralelogramo, $t = 112°$. Según la conjetura de los ángulos consecutivos de un paralelogramo, $s = 180° - 112° = 68°$.




# Propiedades de los paralelogramos especiales

En esta lección

- Descubrirás las propiedades de los **rombos** y sus diagonales
- Descubrirás las propiedades de los **rectángulos** y sus diagonales
- Descubrirás las propiedades de los **cuadrados** y sus diagonales

En la Lección 5.5 investigaste los paralelogramos. En esta lección te concentrarás en tres paralelogramos especiales: rombos, rectángulos, y cuadrados.

### Investigación 1: ¿Qué puedes dibujar con una regla no graduada de doble filo?

Sigue los Pasos 1–3 de tu libro. Debes encontrar que todos los lados del paralelogramo que creas son de la misma longitud. Usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.

**Conjetura de la regla no graduada de doble filo** Si dos rectas paralelas son intersecadas por un segundo par de rectas paralelas que están a la misma distancia que el primer par, entonces el paralelogramo formado es un ___________________. **C-48**

Ahora que conoces una forma rápida de construir un rombo, explorarás algunas propiedades especiales de los rombos.

### Investigación 2: ¿Las diagonales de los rombos tienen propiedades especiales?

En esta investigación considerarás las diagonales de un rombo. Sigue los Pasos 1 y 2 de tu libro. Después completa esta conjetura.

**Conjetura de las diagonales de un rombo** Las diagonales de un rombo son ___________________ y ___________________ entre sí. **C-49**

Sigue el Paso 3 para comparar los dos ángulos formados en cada vértice por una diagonal y los lados. Después completa esta conjetura.

**Conjetura de los ángulos de un rombo** Las diagonales de un rombo ___________________ los ángulos del rombo. **C-50**

Acabas de explorar los rombos, paralelogramos con cuatro lados congruentes. Ahora observarás los rectángulos, paralelogramos con cuatro ángulos congruentes.

Según la conjetura de la suma de los ángulos de un cuadrilátero, sabes que la suma de las medidas de los ángulos de un rectángulo es 360°. Como todos los ángulos tienen las mismas medidas, cada ángulo debe medir 90°. En otras palabras, un rectángulo tiene cuatro ángulos rectos.

(continúa)

## Investigación 3: ¿Las diagonales de un rectángulo tienen propiedades especiales?

Sigue los Pasos 1 y 2 de tu libro. ¿Qué observas sobre las longitudes de las dos diagonales? Como un rectángulo es un paralelogramo, también sabes que las diagonales se bisecan entre sí. Puedes usar tu compás para confirmar esto para tu rectángulo. Combina estas dos observaciones para completar la conjetura.

**Conjetura de las diagonales de un rectángulo** Las diagonales de un rectángulo son ____________ y se ____________ entre sí. **C-51**

Un cuadrado es un paralelogramo que es tanto equiangular como equilátero. Aquí hay dos definiciones de un cuadrado.

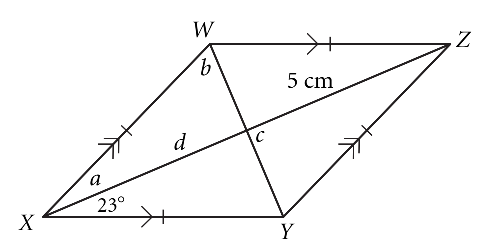
Un **cuadrado** es un rombo equiangular.

Un **cuadrado** es un rectángulo equilátero.

Como un cuadrado es un paralelogramo, un rombo, y un rectángulo, todas las propiedades de estos cuadriláteros también son ciertas para los cuadrados. Revisa lo que sabes sobre las diagonales de cada uno de estos cuadriláteros, y usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.

**Conjetura de las diagonales de un cuadrado** Las diagonales de un cuadrado son ____________, ____________, y ____________. **C-52**

***EJEMPLO*** Encuentra las medidas rotuladas con letras.




**▶ *Solución*** La figura es un rombo, así que según la conjetura de los ángulos de un rombo, las diagonales bisecan a los ángulos. Por lo tanto, $a = 23°$.

Según la conjetura de los ángulos consecutivos de un paralelogramo, $\angle WXY$ y $\angle XWZ$ son suplementarios, por lo que $m\angle XWZ + 46° = 180°$. Entonces, $m\angle XWZ = 134°$, así que $b = \frac{1}{2}(134°) = 67°$.

Según la conjetura de las diagonales de un rombo, las diagonales son perpendiculares y se bisecan entre sí, de manera que $c = 90°$ y $d = 5$ cm.




# Probar las propiedades de los cuadriláteros

En esta lección

- Conocerás la estrategia del "razonamiento retrospectivo" para escribir pruebas
- Probarás muchas de las conjeturas sobre los cuadriláteros de este capítulo

En el presente capítulo has hecho muchas conjeturas respecto a las propiedades de los cuadriláteros. En esta lección escribirás las pruebas de varias de estas conjeturas.

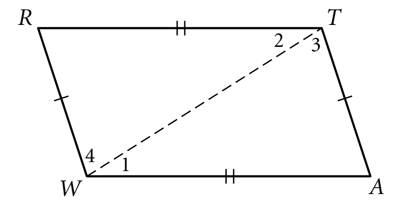
Observa la ilustración de los bomberos de tu libro. El bombero que sostiene la manguera le ha pedido al otro bombero que abra una de las bocas de incendio. ¿Cuál debe abrir? Una forma de solucionar este problema es partir del extremo de la manguera que sostiene el primer bombero y seguirla hasta llegar a la boca de incendio. Puedes usar una estrategia similar para ayudarte a escribir pruebas.

Para planear una prueba, con frecuencia es útil comenzar con la conclusión (esto es, la proposición que deseas probar) y retroceder hasta el principio, dando un paso a la vez. Hacer un organigrama puede ayudarte a visualizar el flujo del razonamiento. El ejemplo de tu libro ilustra cómo funciona esta estrategia. Lee ese ejemplo con mucha atención. Después lee el ejemplo siguiente que muestra cómo probar la proposición del Ejercicio 3.

***EJEMPLO*** Prueba la conjetura: Si los lados opuestos de un cuadrilátero son congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

**Dado:** El cuadrilátero *WATR*, donde $\overline{WA} \cong \overline{RT}$ y $\overline{WR} \cong \overline{AT}$, y con la diagonal $\overline{WT}$

**Demuestra:** *WATR* es un paralelogramo



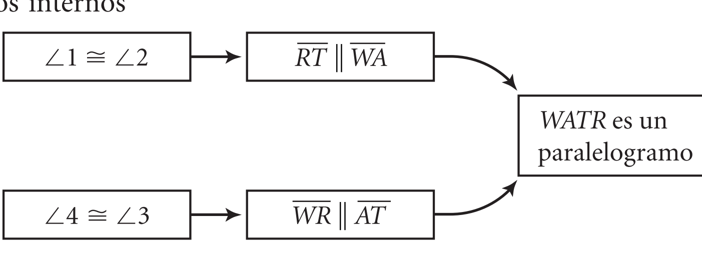

▶ ***Solución*** Construye tu prueba trabajando hacia atrás. Tu razonamiento puede funcionar de esta forma:

"Puedo demostrar que *WATR* es un paralelogramo si puedo probar que los lados opuestos son paralelos. Esto es, necesito demostrar que $\overline{RT} \parallel \overline{WA}$ y $\overline{WR} \parallel \overline{AT}$".

$\overline{RT} \parallel \overline{WA}$ → *WATR* es un paralelogramo

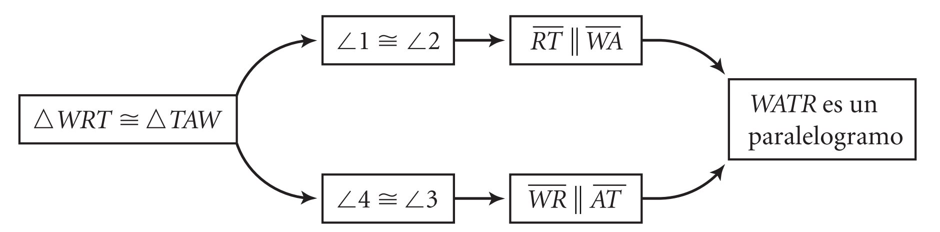
$\overline{WR} \parallel \overline{AT}$ → *WATR* es un paralelogramo

"Puedo demostrar que $\overline{RT} \parallel \overline{WA}$ si puedo probar que los ángulos alternos internos $\angle 1$ y $\angle 2$ son congruentes. Puedo demostrar que $\overline{WR} \parallel \overline{AT}$ si puedo probar que los ángulos alternos internos $\angle 4$ y $\angle 3$ son congruentes".

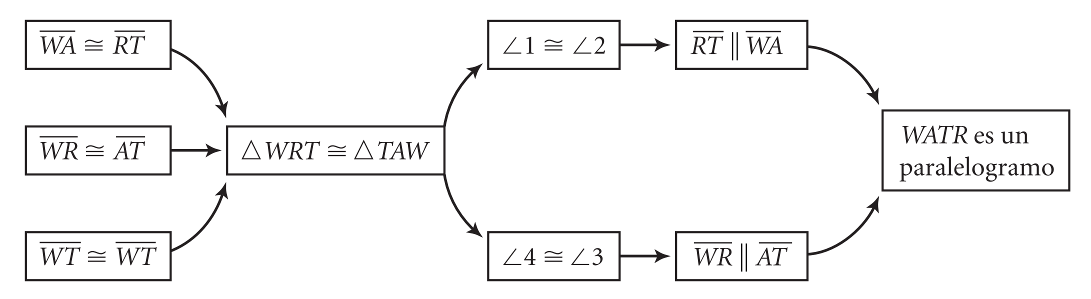



**(continúa)**

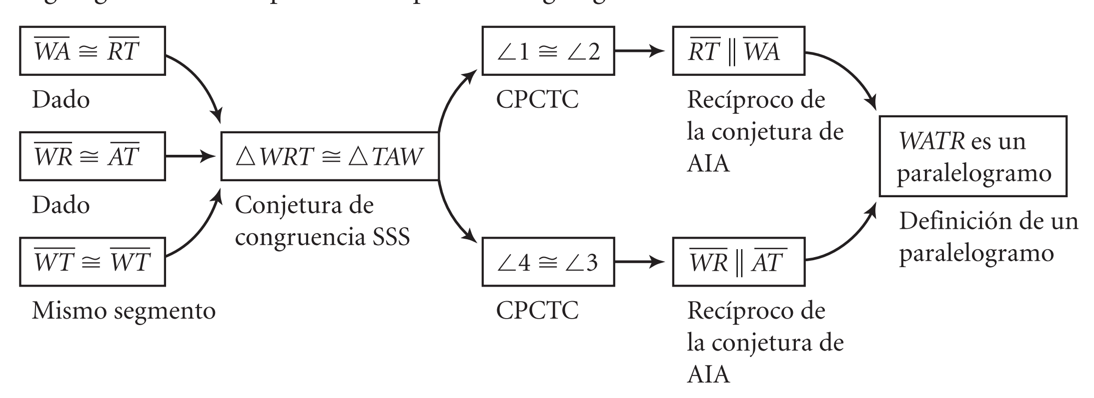
"Puedo demostrar que $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 4 \cong \angle 3$ si son partes correspondientes de triángulos congruentes".




"¿Puedo demostrar que $\triangle WRT \cong \triangle TAW$? Sí, utilizando SSS, porque se da que $\overline{WA} \cong \overline{RT}$ y $\overline{WR} \cong \overline{AT}$, y $\overline{WT} \cong \overline{WT}$ porque es el mismo segmento en ambos triángulos".




Al añadir la razón de cada proposición debajo de cada caja, puedes convertir el organigrama en una prueba completa de organigrama.




Si lo prefieres, puedes escribir la prueba en forma de párrafo:

"Tenemos que $\overline{WA} \cong \overline{RT}$ y $\overline{WR} \cong \overline{AT}$. $\overline{WT} \cong \overline{WT}$ porque es el mismo segmento. Así, $\triangle WRT \cong \triangle TAW$ según la conjetura de congruencia SSS. Según CPCTC, $\angle 1 \cong \angle 2$ y $\angle 4 \cong \angle 3$. Según el recíproco de la conjetura de los ángulos alternos internos, $\overline{RT} \parallel \overline{WA}$ y $\overline{WR} \parallel \overline{AT}$. Por lo tanto, *WATR* es un paralelogramo porque, por definición, un paralelogramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos. Q.E.D."

Para más práctica trabajando para atrás, haz la Investigación de hallar la ruta cuadrada en la página 300 de tu libro.

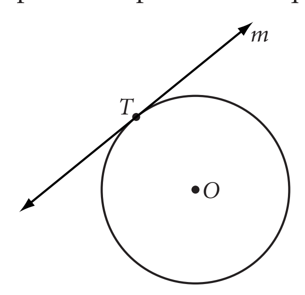



# Propiedades de la tangente

En esta lección

- Revisarás los términos asociados con los **círculos**
- Descubrirás cómo se relacionan una tangente a un círculo y el radio al **punto de tangencia**
- Harás una conjetura respecto a los **segmentos tangentes** a un círculo desde un punto fuera del círculo

Ya has aprendido algunos términos relacionados con los círculos. Revisa los términos y las figuras en la página 310 de tu libro. La **tangente** a un círculo es una recta en el plano del círculo que interseca al círculo en exactamente un punto. El punto en el que la tangente toca el círculo es el **punto de tangencia.**




La recta *m* es una **tangente** al círculo *O*. El punto *T* es el **punto de tangencia.**

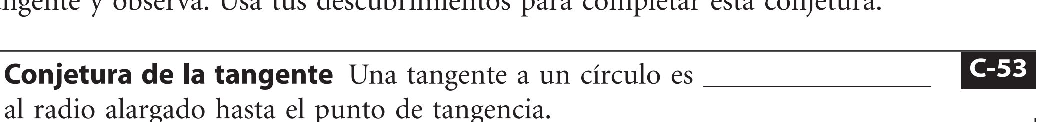
## Investigación 1: Salir por la tangente

Construye un círculo grande. Rotula el centro como *O*.

Usa una regla no graduada para trazar una recta que parezca tocar el círculo en un punto. Rotula el punto T y dibuja el radio $\overline{OT}$.

Mide los ángulos formados por el radio y la recta tangente. ¿Qué relación hay entre los ángulos?

¿Obtendrás el mismo resultado con una tangente diferente? Dibuja otra tangente y observa. Usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.



**Conjetura de la tangente** Una tangente a un círculo es ________________ al radio alargado hasta el punto de tangencia. **C-53**

## Investigación 2: Segmentos tangentes

Sigue los Pasos 1–3 de tu libro. ¿Qué relación hay entre las longitudes de los segmentos tangentes?

¿Obtendrás los mismos resultados si comienzas con un punto diferente fuera del círculo? Escoge otro punto y observa. Usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.

**Conjetura de los segmentos tangentes** Los segmentos tangentes a un círculo desde un punto fuera del círculo son __________________. **C-54**

(continúa)

Lee la información sobre los arcos mayores en la página 313 de tu libro y analiza el ejemplo. Después lee las definiciones de **círculos internamente tangentes** y **círculos externamente tangentes.**

Ahora lee el ejemplo de siguiente.

***EJEMPLO***

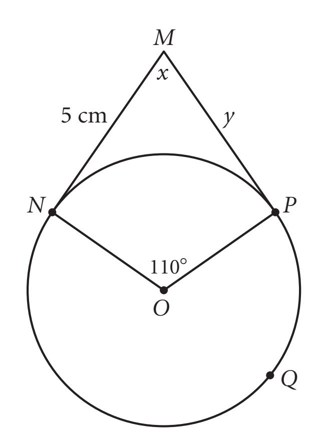
**a.** $\overline{MN}$ y $\overline{MP}$ son tangentes al círculo $O$.

$x =$ ______

$y =$ ______

$m\widehat{NP} =$ ______

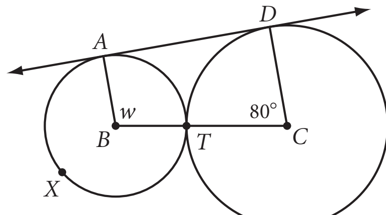
$m\widehat{PQN} =$ ______




**b.** $\overleftrightarrow{AD}$ es tangente tanto al círculo $B$ como al círculo $C$.

$w =$ _____

$m\widehat{AXT} =$ ______




**c.** Observa la figura de la parte a. ¿Qué tipo de cuadrilátero es $MNOP$?

▶ ***Solución***

**a.** Según la conjetura de la tangente, $m\angle MNO = 90°$ y $m\angle MPO = 90°$. Según la conjetura de la suma de los ángulos de un cuadrilátero, $90° + 90° + 110° + x = 360°$, entonces $x = 70°$. Según la conjetura de los segmentos tangentes, $\overline{MN} \cong \overline{MP}$, de manera que $y = 5$ cm.

Como la medida de un arco menor es igual a la medida de su ángulo central, $m\widehat{NP} = 110°$. Resta esta medida a 360° para hallar la medida del arco mayor, dando $m\widehat{PQN} = 250°$.

**b.** Según la conjetura de la tangente, $m\angle BAD = 90°$ y $m\angle CDA = 90°$. Por la conjetura de la suma de los ángulos de un cuadrilátero, $90° + 90° + 80° + w = 360°$. Al resolver esta ecuación, obtenemos $w = 100°$.

La medida del arco menor $\widehat{AT}$ es igual a la medida del ángulo central $\angle ABT$, entonces $m\widehat{AT} = 100°$. Resta esta medida a 360° para hallar la medida de su arco mayor: $m\widehat{AXT} = 360° - 100° = 260°$.

**c.** $MNOP$ es un papalote porque $\overline{MN} \cong \overline{MP}$ y $\overline{ON} \cong \overline{OP}$.




# Propiedades de las cuerdas

En esta lección

- Definirás el **ángulo central** y el **ángulo inscrito**
- Investigarás las propiedades de las **cuerdas** de un círculo

## Investigación 1: Definir los ángulos en un círculo.

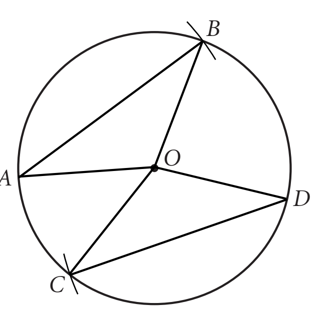
En tu libro, observa los ejemplos y los no ejemplos de ángulos centrales. ¿Qué tienen en común los ángulos centrales? ¿Qué características tienen los ángulos centrales que los otros ángulos no tienen? Usa tus observaciones para completar esta definición de un ángulo central.

Un **ángulo central** es un ángulo cuyo vértice es ____________________.

Ahora observa los ejemplos y los no ejemplos de ángulos inscritos. Observa que cada ángulo inscrito tiene su vértice sobre el círculo. Sin embargo, $\angle VWX$ también lo tiene, y *no* es un ángulo inscrito. ¿Qué diferencias existen entre los ángulos inscritos y $\angle VWX$? Usa tus descubrimientos para completar esta definición.

Un **ángulo inscrito** es un ángulo cuyo vértice es ____________________ y cuyos lados ____________________.

## Investigación 2: Las cuerdas y sus ángulos centrales




Construye un círculo grande y rotula el centro O. Usa tu compás para construir dos cuerdas congruentes. Rotula las cuerdas como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Construye los radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, y $\overline{OD}$.

Usa un transportador para medir $\angle BOA$ y $\angle COD$. ¿Qué relación hay entre las medidas?

Observa si obtienes los mismos resultados si comienzas con un círculo diferente. Después completa esta conjetura.

**Conjetura de los ángulos centrales de una cuerda** Si dos cuerdas de un círculo son congruentes, entonces determinan dos ángulos centrales que son ____________________. **C-55**

En la Lección 6.1 aprendiste que un arco menor tiene la misma medida que su ángulo central. Si las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes y los ángulos centrales $\angle BOA$ y $\angle COD$ son congruentes, ¿qué puedes concluir sobre sus arcos intersecados $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$? Puedes doblar tu papel para confirmar tu respuesta. Ahora completa la conjetura.

**Conjetura de los arcos de las cuerdas** Si dos cuerdas de un círculo son congruentes, entonces sus ____________________ son congruentes. **C-56**

**(continúa)**

## Investigación 3: Las cuerdas y el centro del círculo

Sigue el Paso 1 de tu libro. La perpendicular a cada cuerda divide la cuerda en dos segmentos. ¿Qué relación hay entre las longitudes de los segmentos? Usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.

**C-57**

**Conjetura de una perpendicular a una cuerda** La perpendicular que va del centro de un círculo a una cuerda es ___________________ de la cuerda.

Ahora usa tu compás para comparar las distancias (medidas a lo largo de la perpendicular) desde el centro hasta las cuerdas. ¿Qué relación hay entre estas distancias?

Dibuja un círculo de un tamaño diferente y sigue el Paso 1 de tu libro para el nuevo círculo. Compara las distancias del centro del círculo a cada cuerda. ¿Tus descubrimientos son iguales que en el primer círculo? Completa esta conjetura.

**C-58**

**Conjetura de la distancia de la cuerda al centro** Dos cuerdas congruentes de un círculo son ___________________ desde el centro del círculo.

## Investigación 4: Mediatriz de una cuerda

Construye un círculo grande y marca el centro. Dibuja dos cuerdas no paralelas que *no* sean diámetros. Construye la mediatriz (*perpendicular bisector*) de cada cuerda y alarga las mediatrices hasta que se intersequen. ¿Dónde está el punto de intersección?

Construye otro círculo que sea más grande o más chico que el primer círculo que dibujaste. Dibuja dos cuerdas y construye sus mediatrices. ¿Dónde se intersecan las mediatrices? Completa esta conjetura.

**C-59**

**Conjetura de la mediatriz de una cuerda** La mediatriz de una cuerda pasa por ___________________ del círculo.

Ahora puedes encontrar el centro de cualquier círculo y el vértice del ángulo central de cualquier arco. Lo único que tienes que hacer es construir las mediatrices de las cuerdas no paralelas.




# Arcos y ángulos

En esta lección

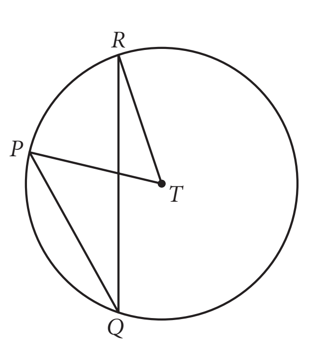
- Harás unas conjeturas respecto a los **ángulos inscritos** en un círculo
- Investigarás las relaciones existentes entre los ángulos de un **cuadrilátero cíclico**
- Compararás los arcos que se forman cuando dos rectas paralelas intersecan a un círculo

En esta lección descubrirás las propiedades de los arcos y los ángulos asociados con ellos.

## Investigación 1: Propiedades de los ángulos inscritos

Considera el diagrama del círculo $O$ de tu libro. Observa que $\angle COR$ es un *ángulo central*, mientras que $\angle CAR$ es un *ángulo inscrito*. Ambos ángulos cortan (*intercept*) $\overset{\frown}{CR}$.

Recuerda que la medida de un arco menor es igual a la medida de su ángulo central. Halla $m\overset{\frown}{CR}$ midiendo $\angle COR$. Después, halla la medida de $\angle CAR$. ¿Qué relación hay entre la medida del ángulo inscrito y la medida del arco cortado?




Construye tu propio círculo $T$. Dibuja un ángulo inscrito $PQR$ y su ángulo central correspondiente $PTR$. Aquí se muestra un ejemplo.

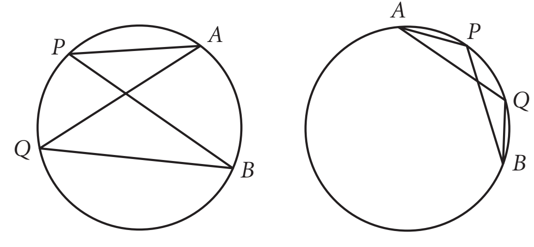
¿Cuál es la medida de $\overset{\frown}{PR}$? ¿Cuál es la medida de $\angle PQR$? ¿Qué relación hay entre las medidas? Usa tus descubrimientos en esta investigación para completar esta conjetura.

**Conjetura del ángulo inscrito** La medida de un ángulo inscrito en un círculo es ___________________ la medida de su arco cortado. **C-60**

## Investigación 2: Ángulos inscritos que cortan el mismo arco

Sigue los Pasos 1 y 2 de tu libro. Observa que al seleccionar $P$ y $Q$ sobre el arco mayor, se crean dos ángulos, $\angle APB$ y $\angle AQB$, que cortan el mismo *arco menor*.

Dibuja otro círculo. Sigue el Paso 4 de tu libro. Observa que al seleccionar $P$ y $Q$ sobre el arco menor, se crean dos ángulos, $\angle APB$ y $\angle AQB$, que cortan el mismo *arco mayor*.




En cada caso, ¿qué relación hay entre las medidas de los dos ángulos inscritos? Usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.

**Conjetura de los ángulos inscritos que cortan el mismo arco** Los ángulos inscritos que cortan el mismo arco son ___________________. **C-61**

(continúa)

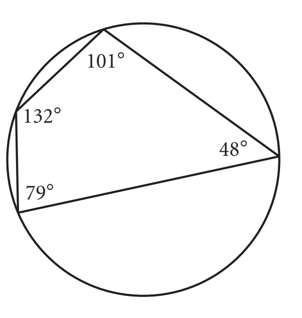
### Investigación 3: Ángulos inscritos en un semicírculo

Sigue los Pasos 1 y 2 de tu libro para construir y medir tres ángulos inscritos en el mismo semicírculo. Todos los ángulos deberían tener la misma medida. ¿Cuál es esta medida? Completa esta conjetura.

**Conjetura de los ángulos inscritos en un semicírculo** Los ángulos inscritos en un semicírculo son ___________________. **C-62**

### Investigación 4: Cuadriláteros cíclicos

Un cuadrilátero inscrito en un círculo se llama **cuadrilátero cíclico.**




Construye un círculo grande. Elige cuatro puntos sobre el círculo y conéctalos para formar un cuadrilátero cíclico. Rotula cada ángulo con su medida. En otro círculo, construye un segundo cuadrilátero cíclico y rotula sus ángulos con sus medidas. He aquí otro ejemplo.

En cada cuadrilátero cíclico, encuentra sumas de pares de ángulos consecutivos y sumas de pares de ángulos opuestos. ¿Qué notaste? Completa esta conjetura.

**Conjetura de un cuadrilátero cíclico** Los ángulos ___________________ de un cuadrilátero cíclico son ___________________. **C-63**

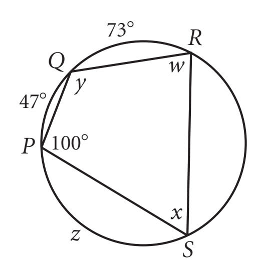
### Investigación 5: Arcos por rectas paralelas

Lee la definición de secante y sigue los Pasos 1–3 de tu libro. Después completa la conjetura.

**Conjetura de los arcos cortados por rectas** paralelas las rectas paralelas cortan los arcos ___________________ en un círculo. **C-64**

Lee el ejemplo siguiente.

***EJEMPLO*** Encuentra cada medida rotulada con una letra.




**▶ *Solución*** Según la conjetura de un cuadrilátero cíclico, $w + 100° = 180°$, así que $w = 80°$. $\angle PSR$ corta $\widehat{PR}$. $m\widehat{PR} = 47° + 73° = 120°$, así que según la conjetura de un ángulo inscrito, $x = \frac{1}{2}(120°) = 60°$.

Según la conjetura de un cuadrilátero cíclico, $x + y = 180°$. Sustituyendo $x$ por 60° y resolviendo la ecuación, obtenemos $y = 120°$. Según la conjetura de un ángulo inscrito, $w = \frac{1}{2}(47° + z)$. Sustituyendo $w$ por 80° y resolviendo la ecuación, obtenemos $z = 113°$.




# Demostración de conjeturas sobre el círculo

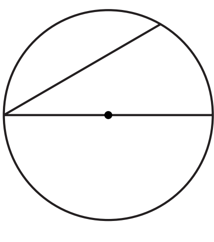
En esta lección

- Probarás la **conjetura de un ángulo inscrito**
- Probarás otras conjeturas relacionadas con círculos

En la lección 6.3 descubriste la conjetura de un ángulo inscrito.

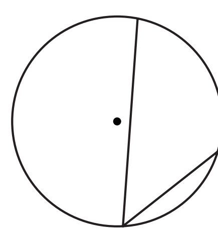
La medida de un ángulo inscrito en un círculo es igual a la mitad de la medida de su arco cortado.

En esta lección probarás esta conjetura. Primero, observa que hay tres formas en que un ángulo inscrito puede relacionarse con el centro de un círculo.



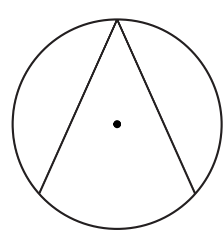
Caso 1

El centro del círculo está sobre el ángulo.



Caso 2

El centro está fuera del ángulo.



Caso 3

El centro está dentro del ángulo.

Éstas son las únicas posibilidades de manera que si puedes probar que la conjetura es cierta en cada caso, habrás probado que la conjetura siempre es cierta.

**Caso 1: El centro del círculo está sobre el ángulo inscrito.**

Mira el dibujo para el Caso 1 en la página 330 de tu libro. Se ha añadido el radio punteado $\overline{OA}$ para formar $\triangle AOB$. Para probar que la conjetura es cierta para este caso, necesitas probar que $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AC}$ (esto es, $x = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AC}$).

Observa lo siguiente:

- $\angle AOC$ es el ángulo central para $\overset{\frown}{AC}$ (¿Como están relacionados $z$ y $m\overset{\frown}{AC}$?)
- $\angle AOC$ es un ángulo externo para $\triangle AOB$ (¿Como están relacionados $y$, $x$ y $z$?)
- $\triangle AOB$ es isósceles. (¿Como están relacionados $x$ y $y$?)

Combina estas observaciones para escribir una prueba de organigrama para el Caso 1. Después compara tu prueba con la de tu libro.

**Caso 2: El centro del círculo está afuera del ángulo inscrito.**

Puedes usar el Caso 1 para ayudarte a probar el Caso 2. Mira el dibujo para el Caso 2 en la página 331 de tu libro. Se ha añadido un diámetro punteado $\overline{DB}$. Para probar que la conjetura es cierta para este caso, debes probar que $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{AC}$ $\left(\text{esto es, } x = \frac{q}{2}\right)$.

Piensa en lo siguiente:

- ¿Cómo se relacionan $x$, $y$ y $z$?
- ¿Cómo se relacionan $p$, $q$ y $m\overset{\frown}{DC}$?
- Usando el Caso 1, ¿cómo se relaciona $y$ con $p$? ¿Cómo se relaciona $z$ con $p + q$?

**(continúa)**

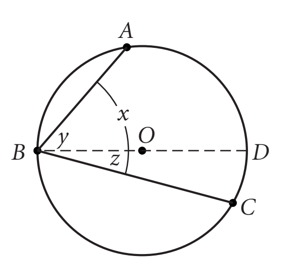
Combina estas observaciones para escribir una prueba de organigrama para el Caso 2. Después compara tu prueba con la de tu libro.

**Caso 3: El centro del círculo está adentro del ángulo inscrito.**

Usa la información dada y la figura marcada en el Ejemplo A siguiente para escribir una prueba de organigrama para este caso. Puedes usar el organigrama del Caso 2 como guía para esta prueba. Escribe tu prueba antes de mirar la solución del Ejemplo A. Después compara tu prueba con la prueba dada.

***EJEMPLO A***

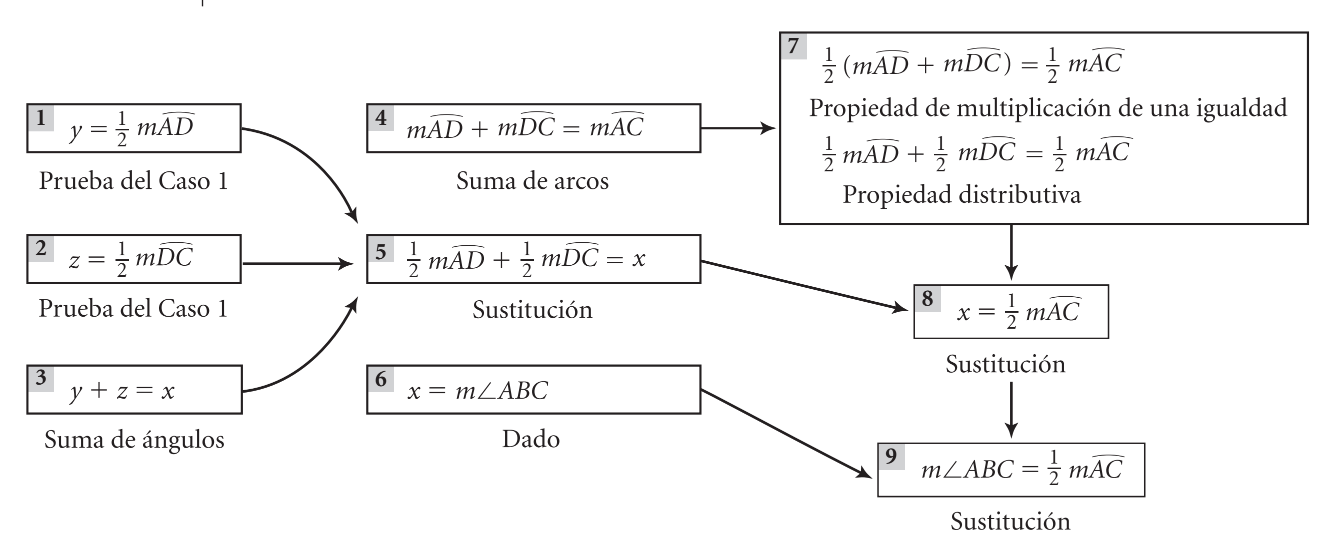
Prueba el Caso 3 de la conjetura de un ángulo inscrito. La medida de un ángulo inscrito en un círculo es igual a la mitad de la medida de su arco cortado cuando el centro del círculo está dentro del ángulo.




**Dado:** Círculo $O$ con el ángulo inscrito $ABC$ cuyos lados están en cualquier lado del diámetro $\overline{BD}$.

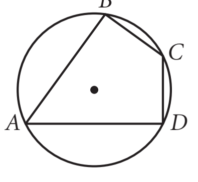
**Demuestra:** $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\widehat{AC}$, o $x = \frac{1}{2}m\widehat{AC}$

▶ ***Solución***




***EJEMPLO B***

Escribe una prueba de párrafo o una prueba de organigrama de la conjetura: Si un papalote está inscrito en un círculo, entonces los ángulos que no son vértices son ángulos rectos.




**Dado:** Círculo con papalote $ABCD$ inscrito donde $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{CD}$

**Demuestra:** $\angle B$ y $\angle D$ son ángulos rectos.

▶ ***Solución***

Según la conjetura de los ángulos de un papalote $\angle B \cong \angle D$.
Según la conjetura del cuadrilátero cíclico, $\angle B$ y $\angle D$ son suplementarios. Como $\angle B$ y $\angle D$ son iguales y suplementarios, deben medir 90°. Entonces $\angle B$ y $\angle D$ son ángulos rectos.

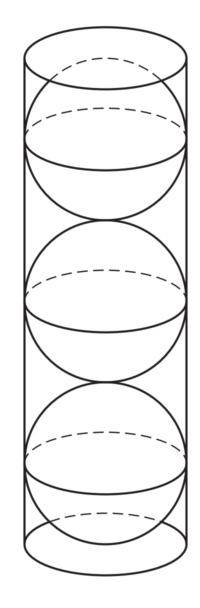



# La proporción circunferencia/diámetro

En esta lección

- Descubrirás la relación entre el **diámetro** y la **circunferencia** de un círculo

La distancia alrededor de un polígono es el perímetro. La distancia alrededor de un círculo se llama la **circunferencia.**



Piensa en una lata de tres pelotas de tenis. ¿Cuál crees que sea mayor, la altura de la lata o la circunferencia de la lata? La altura es aproximadamente tres diámetros de pelotas de tenis, que es aproximadamente igual a tres diámetros de la lata. Si tienes una lata de pelotas de tenis, coloca una cuerda alrededor de la lata, para medir la circunferencia, y luego compara la medida con la altura. Debes encontrar que la circunferencia de la lata es ligeramente mayor que la altura. Esto es, la circunferencia es un poco más de tres diámetros. En la siguiente investigación descubrirás la relación que existe entre el diámetro y la circunferencia de cualquier círculo.

## Investigación: Una muestra de Pi

Para esta investigación necesitarás varios objetos redondos, junto con una cinta métrica o una cuerda y un metro.

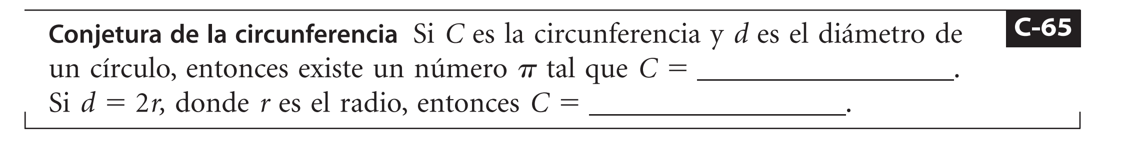
Enrolla la cinta métrica o la cuerda alrededor de cada objeto para medir su circunferencia. Luego mide el diámetro de cada objeto. Toma todas las medidas redondeando al milímetro (décima de centímetro) más próximo. La siguiente tabla incluye algunas medidas de muestra. Copia la tabla y añádele las medidas que hallaste.

| Objeto | Circunferencia ($C$) | Diámetro ($d$) | Razón $\frac{C}{d}$ |
|---|---|---|---|
| Quarter | 7.8 cm | 2.5 cm | |
| Disco compacto | 37.7 cm | 12.0 cm | |
| Jarra | 25.9 cm | 8.2 cm | |
| Plato pequeño | 47.4 cm | 15.1 cm | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Calcula la razón $\frac{C}{d}$ para cada objeto. Debes encontrar que, en cada caso, la razón es un poco más de 3. De hecho, la razón $\frac{C}{d}$ es exactamente el mismo número para todos los círculos. La proporción constante se denota con la letra griega $\pi$ (pi). Así pues, $\frac{C}{d} = \pi$.

Si resuelves esta ecuación para $C$, obtendrás la fórmula para la circunferencia de un círculo, en términos de su diámetro. Como el diámetro de un círculo es dos veces el radio, también puedes escribir una fórmula para la circunferencia en términos del radio.

**(continúa)**



**Conjetura de la circunferencia** Si $C$ es la circunferencia y $d$ es el diámetro de un círculo, entonces existe un número $\pi$ tal que $C$ = ________________. Si $d = 2r$, donde $r$ es el radio, entonces $C$ = ________________.

**C-65**

El número $\pi$ es un *número irracional,* así que su forma decimal nunca termina y sus dígitos no siguen ningún patrón. Tu calculadora probablemente da una aproximación de $\pi$ hasta ocho o nueve décimales. Si no tienes acceso a una calculadora, puedes usar el valor 3.14 como una aproximación de $\pi$. Si se require una respuesta exacta, expresa tu respuesta en términos de $\pi$. Los ejemplos de tu libro te muestran cómo puedes aplicar la conjetura de la circunferencia. Lee los ejemplos atentamente. He aquí otros dos ejemplos.

***EJEMPLO A*** Un círculo tiene un radio de 6.5 metros. ¿Qué circunferencia tiene? Usa una calculadora y da tu respuesta redondeada al 0.1 de metro más cercano.

► ***Solución***

$C = 2\pi r$ La fórmula para la circunferencia.

$C = 2\pi(6.5)$ Sustituye $r$ por 6.5.

$C = 13\pi \approx 40.8$ m Evalúa y redondea al 0.1 de metro más cercano.

***EJEMPLO B*** Para encontrar el tamaño de tu sombrero, mide la circunferencia de tu cabeza en pulgadas y después usa la fórmula de la circunferencia para encontrar el diámetro, redondeando hasta el octavo de pulgada más cercano. La circunferencia de la cabeza de Tameka es aproximadamente de $23\frac{1}{2}$ pulg. ¿Cuál es el tamaño de su sombrero?

► ***Solución***

$C = \pi d$ La fórmula para la circunferencia.

$23\frac{1}{2} = \pi d$ Sustituye $C$ por $23\frac{1}{2}$.

$7\frac{1}{2} \approx d$ Divide ambos lados entre $\pi$ y redondea al octavo de pulgada más cercano.

El tamaño del sombrero de Tameka es $7\frac{1}{2}$.



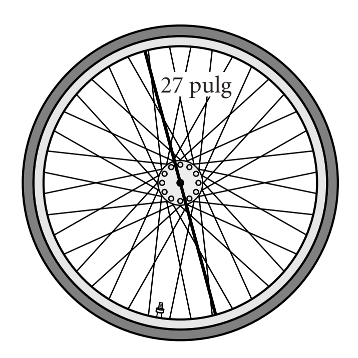

# Alrededor del mundo

En esta lección

- Solucionarás problemas prácticos que tienen que ver con el radio, el diámetro y la circunferencia

Ahora que conoces $\pi$ y la fórmula para la circunferencia, puedes resolver muchos problemas del mundo real que tienen que ver con los círculos. El ejemplo de tu libro muestra la solución a un problema relacionado con la novela *La vuelta al mundo en ochenta días* de Julio Verne. Lee este ejemplo atentamente. Después lee los ejemplos siguientes.

***EJEMPLO A*** La rueda del monociclo de Devin tiene un diámetro de 27 pulgadas.




**a.** ¿A qué distancia viajará el monociclo en 100 revoluciones de la rueda? Da tu respuesta redondeando al pie más cercano.

**b.** Devin recorre diariamente un trayecto de 2 millas a la escuela en su monociclo. ¿Cuántas revoluciones, aproximadamente, gira la rueda a lo largo de este trayecto? (5280 pies = 1 milla)

▶ ***Solución***

**a.** En una revolución, la rueda cubre una distancia igual a su circunferencia.

$C = \pi d$ La fórmula para la circunferencia.

$C = \pi(27)$ Sustituye $d$ por 27.

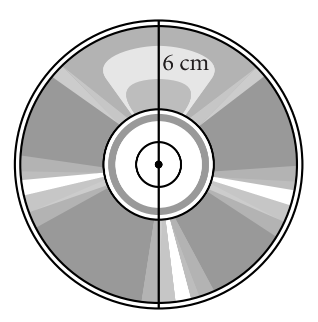
El monociclo viaja $27\pi$ pulgadas en una revolución. Entonces en 100 revoluciones cubre $(100) \cdot 27\pi \approx 8480$ pulgadas, o aproximadamente 707 pies.

**b.** Dos millas son 10,560 pies, ó 126,720 pulgadas. La rueda da una revolución cada $27\pi$ pulgadas, de manera que da $126{,}720 \div 27\pi$, ó aproximadamente 1494 revoluciones durante el trayecto de Devin a la escuela.

**(continúa)**

***EJEMPLO B***

Un punto en la orilla externa de un CD de audio gira a una velocidad de 200 rotaciones por minuto. Si el radio del CD es de 6 cm, ¿a qué distancia se mueve el punto durante la reproducción de un CD de 57 minutos?




▶ ***Solución***

El punto hace 200 rotaciones en 1 minuto. Así que, en 57 minutos dará $200 \cdot 57$, ó 11,400 rotaciones.

La distancia que el punto viaja en una rotación es igual a la circunferencia del CD. Usa la fórmula de la circunferencia para encontrar esta distancia.

$C = 2\pi r$ La fórmula para la circunferencia.

$C = 2\pi(6)$ Sustituye $r$ por 6.

El punto viaja $12\pi$ cm en una rotación. Entonces en 11,400 rotaciones viajará $11{,}400 \cdot 12\pi$, ó 429,780 cm. Esto es igual a aproximadamente 4.3 kilómetros.

***EJEMPLO C***

La ciudad de Rutledge quiere construir una pista para caminar circular de un cuarto de milla de longitud. Para que los vehículos no entren a la pista, la ciudad piensa construir una cerca alrededor de la pista. El área cercada será cuadrada y la cerca, en su punto más cercano, estará a 5 pies de la orilla de la pista circular. ¿Cuántos pies de cerca se necesitarán? Da una respuesta redondeando al pie más próximo e ignora los portones o aperturas.
(1 milla = 5280 pies)

▶ ***Solución***

Observa el dibujo a la derecha.

Pista
5 $d$ 5
Cerca

Primero halla el diámetro de la pista. La circunferencia de la pista es 5280/4 ó 1320 pies. Usando $C = \pi d$, resuelve $d$ para obtener $d = C/\pi$. Entonces, $d = 1320/\pi$, o $d \approx 420.2$ pies. Cada lado de la cerca cuadrada es 10 pies más largo que el diámetro de la pista. Entonces, cada lado del cuadrado debe tener aproximadamente 430.2 pies. La cantidad de cercado necesario es aproximadamente $4 \cdot 430.2 = 1720.8$ pies, o redondeándolo al pie más próximo, 1721 pies.

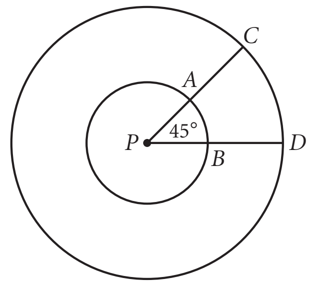



# Longitud de un arco

En esta lección

- Aprenderás la diferencia entre la **longitud de un arco** y la **medida de un arco**
- Encontrarás un método para calcular la longitud de un arco
- Resolverás problemas que tienen que ver con la longitud de un arco

En la figura, $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ tienen la misma *medida* (45°) porque sus ángulos centrales, $\angle CPD$ y $\angle APB$, son el mismo ángulo. Sin embargo, las *longitudes* de $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ son claramente diferentes: $\overset{\frown}{CD}$ es más largo que $\overset{\frown}{AB}$. En esta lección aprenderás cómo encontrar la longitud de un arco.




Lee el Ejemplo A de tu libro. Este ejemplo ilustra que si un arco tiene una medida $x$, entonces el arco es $\frac{x}{360°}$ del círculo. Por ejemplo, cada uno de los arcos de 45° de la figura en esta página es $\frac{45°}{360°}$, ó $\frac{1}{8}$, de un círculo completo.

Piensa cómo se relacionan las fracciones del Ejemplo A con la longitud del arco. Si viajas la cuarta parte alrededor de un círculo, cubrirás $\frac{1}{4}$ de su circunferencia. Si recorres la mitad, cubrirás $\frac{1}{2}$ de la circunferencia. La **longitud de un arco** es una fracción de la circunferencia de su círculo. Mientras que la medida de arco se expresa en grados, la longitud de un arco se expresa en una unidad de distancia.

## Investigación: Encontrar los arcos

Observa las figuras del Paso 1 de tu libro. Halla la fracción del círculo que constituye cada arco. Debes obtener los siguientes resultados.

$\overset{\frown}{AB}$ es $\frac{1}{4}$ del círculo $T$

$\overset{\frown}{CED}$ es $\frac{1}{2}$ del círculo $O$

$\overset{\frown}{GH}$ es $\frac{140°}{360°}$, ó $\frac{7}{18}$, del círculo $P$

Ahora encuentra la circunferencia de cada círculo usando la fórmula $C = \pi d$ ó $C = 2\pi r$. Por ejemplo, como el círculo $P$ tiene un radio de 36 pies, su circunferencia es $2\pi(36)$, ó $72\pi$ pies.

Usa las fracciones que encontraste en el Paso 1 y la circunferencia de cada círculo para hallar la longitud de cada arco. Por ejemplo, $\overset{\frown}{GH}$ constituye $\frac{7}{18}$ del círculo $P$, y el círculo $P$ tiene una circunferencia de $72\pi$. Por lo tanto,

La longitud de $\overset{\frown}{GH} = \frac{7}{18}(72\pi) = 28\pi$

La longitud de $\overset{\frown}{GH}$ es $28\pi$ pies.

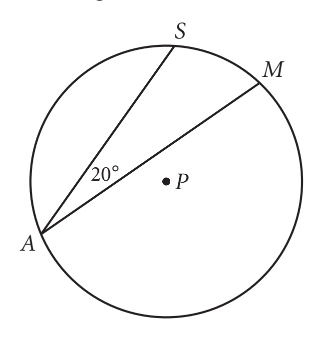
Generaliza este método para hallar la longitud de un arco como una conjetura.

**Conjetura de la longitud de arco** La longitud de un arco es igual a la circunferencia multiplicada por la medida del arco dividida entre ____________________. **C-66**

**(continúa)**

Los Ejemplos B y C de tu libro te muestran cómo puedes aplicar la conjetura de la longitud de arco. Lee estos ejemplos atentamente. Después lee el ejemplo siguiente.

***EJEMPLO*** La longitud de $\widehat{SM}$ es $6\pi$ centímetros. ¿Cuál es el radio del círculo $P$?




▶ ***Solución*** $m\angle SAM = 20°$, así que $m\widehat{SM} = 40°$ según la conjetura del ángulo inscrito. Esto significa que $\widehat{SM}$ es $\frac{40°}{360°}$, ó $\frac{1}{9}$, de la circunferencia del círculo.

longitud del arco $\widehat{SM} = \frac{1}{9}C$ — Usa la conjetura de la longitud del arco.

$6\pi = \frac{1}{9}C$ — Sustituye la longitud del arco por $6\pi$.

$54\pi = C$ — Multiplica ambos lados por 9.

La circunferencia es $54\pi$ centímetros. Usa la fórmula para la circunferencia para encontrar el radio.

$C = 2\pi r$ — La fórmula para la circunferencia.

$54\pi = 2\pi r$ — Sustituye la longitud del arco por $7\pi$.

$27 = r$ — Divide ambos lados entre $2\pi$.

El radio es 27 centímetros.




# Transformaciones y simetría

En esta lección

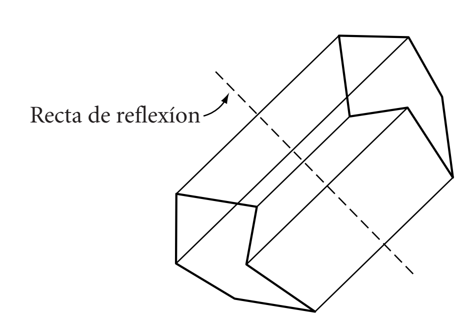
- Conocerás tres tipos de **transformaciones rígidas: traslación, rotación,** y **reflexión**
- Usarás *patty paper* para modelar la reflexión
- Aprenderás cómo identificar figuras con **simetría de rotación** o **simetría de reflexión**

En tu libro, lee el texto que viene antes de la investigación. A continuación se muestra un resumen de algunos de los puntos claves.

1. Una transformación que crea una imagen que es congruente con la figura original se llama una **transformación rígida,** o **isometría.** Tres tipos de transformaciones rígidas son **traslación, rotación** y **reflexión.**
2. Una transformación que cambia el tamaño o la forma de una figura es una **transformación no rígida.**
3. Una **traslación** desliza la figura a lo largo de una trayectoria recta, moviendo cada punto la misma distancia en la misma dirección. Puedes describir una traslación usando un **vector de traslación,** que especifica tanto la distancia como la dirección.
4. Una **rotación** gira una figura alrededor de un punto fijo, rotando cada punto el mismo número de grados. Puedes definir una rotación dando el punto central, el número de grados, y la dirección (en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido opuesto). Cuando no se especifica una dirección, se supone que la rotación se da en el sentido opuesto a las manecillas del reloj.
5. Una **reflexión** voltea una figura a través de una recta, creando el reflejo exacto de la figura. Puedes definir una reflexión especificando la **recta de reflexión.**

## Investigación: La propiedad básica de una reflexión

Sigue los Pasos 1 y 2 de tu libro para crear una figura y su imagen reflejada. Después dibuja unos segmentos que conectan cada vértice con su punto de imagen.




Mide los ángulos en los que los segmentos intersecan a la recta de reflexión. ¿Qué encontraste? La recta de reflexión divide cada segmento conector en dos segmentos. ¿Qué relación hay entre las longitudes de los dos segmentos? Usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.

**Conjetura de la recta de reflexión** La recta de reflexión es la _______________ de todo segmento que une un punto de la figura original con su imagen. **C-67**

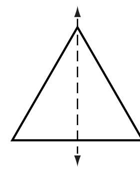
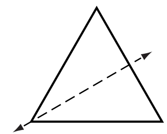
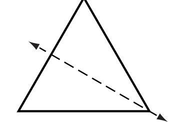
**(continúa)**

Lee el texto restante de esta lección. A continuación se muestra un resumen de de los puntos claves.

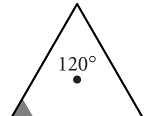
1. Una figura que puede reflejarse a través de una recta, de manera que la imagen resultante coincida con la original, tiene **simetría de reflexión.** La recta de reflexión se llama una **recta de simetría.** Una figura puede tener más de una recta de simetría. Una figura con *n* rectas de simetría tiene simetría de reflexión de orden *n.*
2. Una figura que puede rotarse *menos de un giro completo* alrededor de un punto de manera que la imagen rotada coincida con la original, tiene **simetría de rotación.** Si la imagen coincide con la figura original *n* veces durante un giro completo, entonces se dice que la figura tiene simetría de rotación de orden *n* (*n-fold rotational symmetry*). Una figura que tiene una simetría de rotación de orden 2 también se dice que tiene un punto de simetría.

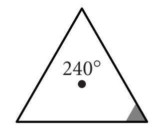
***EJEMPLO*** | Describe todas las simetrías de un triángulo equilátero.

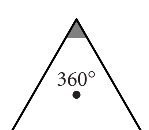
▶ ***Solución*** | Un triángulo equilátero tiene tres simetrías de reflexión. Una recta de reflexión pasa por cada vértice y el punto medio del lado opuesto.

Un triángulo equilátero tiene tres simetrías de rotación (esto es, tiene una simetría de rotación de orden 3). Puede rotarse 120°, 240° y 360° alrededor de su centro y coincidirá consigo mismo.










# Propiedades de las isometrías

En esta lección

- Usarás las **reglas de pares ordenados** para transformar los polígonos en el plano de coordenadas
- Aprenderás las reglas de pares ordenados que corresponden a diversas **isometrías**
- Descubrirás cómo determinar la **trayectoria mínima** de un punto a una recta y a otro punto que esté en el mismo lado de la recta

Puedes usar una regla de pares ordenados para transformar figuras en el plano de coordenadas. Una **regla de pares ordenados** describe la forma en que cada punto de una figura original se reubica para crear una imagen.

El Ejemplo A de tu libro ilustra que la regla $(x, y) \rightarrow (x + 2, y - 3)$ es una traslación que mueve cada punto de una figura hacia la derecha 2 unidades y hacia abajo 3 unidades. El vector de traslación se escribe $\langle 2, -3 \rangle$. Lee el Ejemplo A. En general, la regla $(x, y) \rightarrow (x + h, y + k)$ es una traslación de $h$ unidades horizontalmente y $k$ unidades verticalmente. El vector de traslación general se escribe $\langle h, k \rangle$.

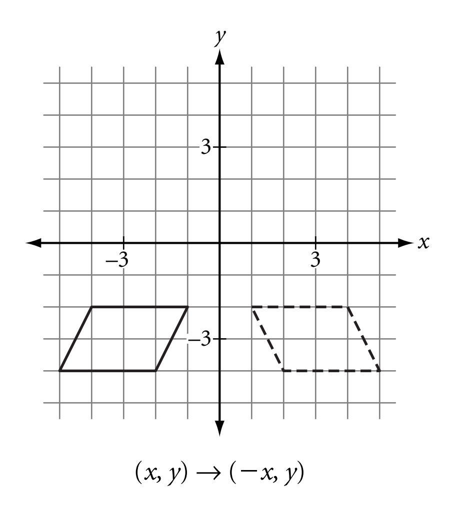
## Investigación 1: Transformaciones sobre un plano de coordenadas

En esta investigación explorarás cuatro reglas de pares ordenados.

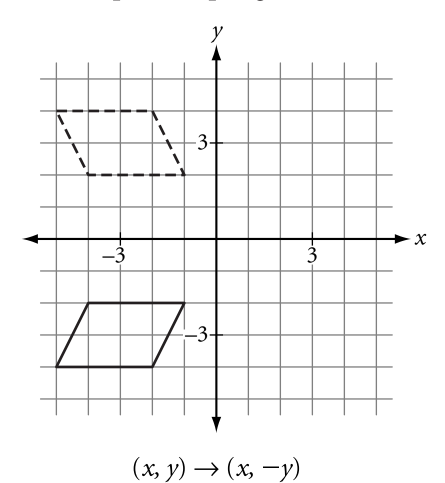
Sigue los Pasos 1 y 2 de tu libro. Dibuja tu polígono original en el Cuadrante I, II o IV. (Aquí hay algunos ejemplos en los que el polígono original se ubica en el Cuadrante III.)

Usando tus dibujos y algo de *patty paper*, determina si cada transformación es una reflexión, una traslación o una rotación. Identifica las rectas de reflexión y los centros y ángulos de rotación.

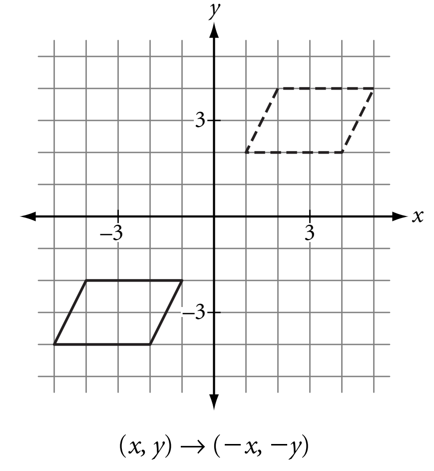
Ahora considera los ejemplos. En cada gráfica, la figura sólida en el Cuadrante III es la original y la figura punteada es la imagen. (*Nota*: La recta $y = x$ se ha añadido a la última gráfica.) Determina cómo se ha transformado la figura original para crear la imagen. ¿Obtienes los mismos resultados que obtuviste para tu polígono?



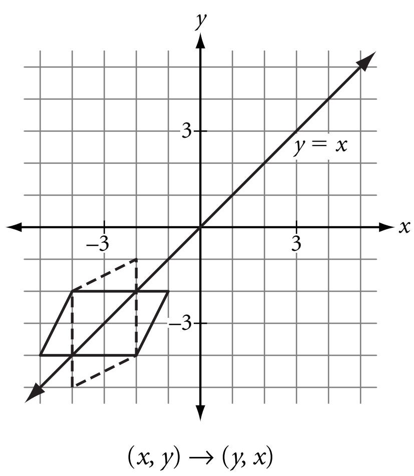

$(x, y) \rightarrow (-x, y)$




$(x, y) \rightarrow (x, -y)$




$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$




$(x, y) \rightarrow (y, x)$

**(continúa)**

Usa tus descubrimientos para completar la conjetura de las transformaciones coordenadas en tu libro.

Ahora volverás a visitar la "geometría de la sala de billar". Recuerda que cuando una bola rueda sin girar hacia una banda, el ángulo de salida es congruente con el ángulo de entrada.

## Investigación 2: Encontrar una trayectoria mínima

Sigue los Pasos 1–4 de la investigación en tu libro. Después desdobla el papel y dibuja $\overline{AB'}$. Observa que $\overline{AB'}$ pasa a través del punto $C$.

Mide la longitud de la trayectoria de $A$ a $B'$. Mide la longitud de la trayectoria de dos partes de $A$ a $C$ a $B$. Debes encontrar que las longitudes de las trayectorias son iguales.

La trayectoria de $A$ a $C$ a $B$ es la trayectoria más corta, o la **trayectoria mínima,** de $A$ a la banda a $B$. Para ver por qué, escoge cualquier otro punto $D$ sobre la banda. La trayectoria de $A$ a $D$ a $B$ es la misma longitud que la trayectoria de $A$ a $D$ a $B'$. $\overline{AB'}$ es más corta que la trayectoria de $A$ a $D$ a $B'$ (¿por qué?), por lo que también es más corta que la trayectoria de $A$ a $D$ a $B$. Como $\overline{AB'}$ es de la misma longitud que la trayectoria de $A$ a $C$ a $B$, la trayectoria de $A$ a $C$ a $B$ es más corta que la trayectoria de $A$ a $D$ a $B$. A continuación se muestra este argumento en símbolos.

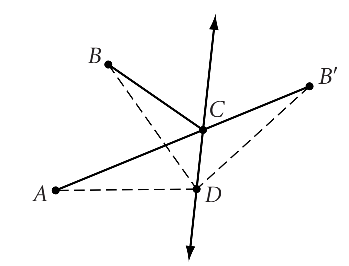
$AD + DB = AD + DB'$

$AB' < AD + DB'$

$AB' < AD + DB$

$AB' = AC + CB$

$AC + CB < AD + DB$




Completa esta conjetura.

**Conjetura de la trayectoria mínima** Si los puntos $A$ y $B$ están de un lado de la recta $\ell$, entonces la trayectoria mínima del punto $A$ a la recta $\ell$ al punto $B$ se encuentra reflejando el punto ________________ a través de la recta $\ell$, dibujando el segmento __________________, después dibujando los segmentos $AC$ y ______________, donde el punto $C$ es el punto de intersección del segmento __________________ y la recta $\ell$. **C-69**

Tus descubrimientos en la investigación muestran que si quieres pegarle a una bola desde el punto $A$ para que se rebote contra la banda y pase por el punto $B$, debes visualizar el punto $B$ reflejado a través de la banda y después apuntar a la imagen reflejada.

En el Ejemplo B de tu libro se aplica lo que aprendiste en la Investigación 2 para resolver un problema sobre el golfito. Lee ese ejemplo.




# Composiciones de transformaciones

En esta lección

- Encontrarás la transformación simple equivalente a la **composición de dos traslaciones**
- Encontrarás la transformación simple equivalente a la **composición de las reflexiones a través de dos rectas paralelas**
- Encontrarás la transformación simple equivalente a la **composición de las reflexiones a través de dos rectas que se intersecan**

Cuando aplicas una transformación a una figura y luego aplicas otra transformación a su imagen, la transformación resultante se llama una **composición** de transformaciones.

En el ejemplo de tu libro, una figura es trasladada por una regla y luego su imagen es trasladada por una regla diferente. La composición de las dos traslaciones es equivalente a una traslación simple. Lee este ejemplo atentamente y asegúrate de que lo comprendes.

## Investigación 1: Reflexiones a través de dos rectas paralelas

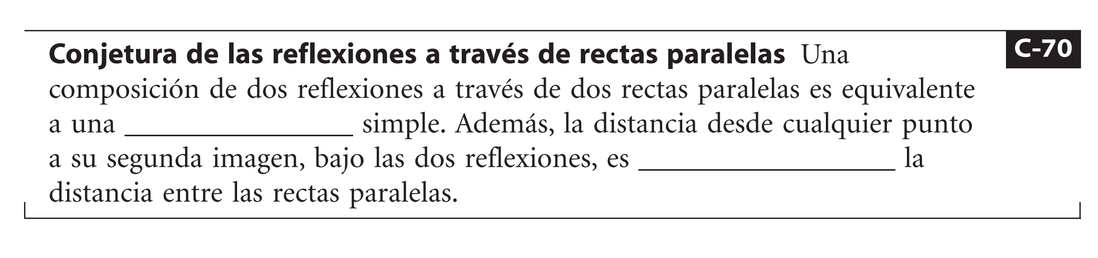
Sigue los Pasos 1–4 para reflejar una figura a través de una recta y después reflejar la imagen a través de una segunda recta, paralela a la primera.

¿Qué transformación única llevaría la figura original a la imagen final? (*Sugerencia*: ¿Cómo se compara la orientación de la imagen final con la orientación de la original?)

Usa un compás o *patty paper* para comparar la distancia entre las rectas paralelas con la distancia entre un punto en la figura original y el punto correspondiente en la imagen final.

Compara las distancias.

Usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.

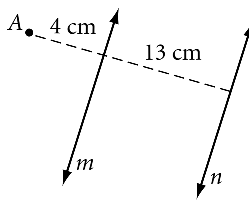

**Conjetura de las reflexiones a través de rectas paralelas** Una composición de dos reflexiones a través de dos rectas paralelas es equivalente a una ________________ simple. Además, la distancia desde cualquier punto a su segunda imagen, bajo las dos reflexiones, es __________________ la distancia entre las rectas paralelas. **C-70**

Lee el ejemplo en la página siguiente.

**(continúa)**

***EJEMPLO***

Las rectas *m* y *n* son paralelas y están separadas por 13 cm.

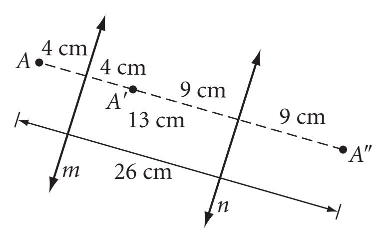



**a.** El punto *A* está a 4 cm de la recta *m* y a 17 cm de la recta *n*. El punto *A* se refleja a través de la recta *m*, y después su imagen, *A′*, se refleja a través de la recta *n* para crear una segunda imagen, el punto *A″*. ¿Qué es la distancia entre el punto *A* y el punto *A″*?

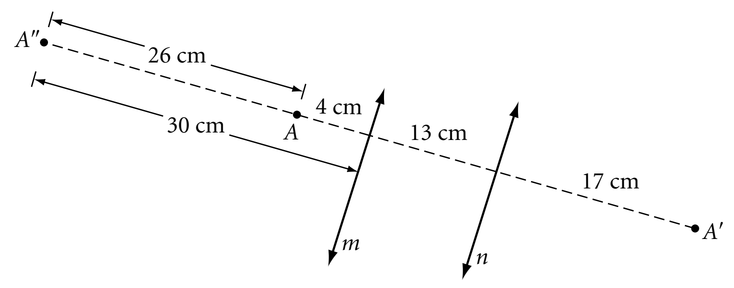
**b.** ¿Qué sucede si *A* se refleja a través de *n*, y después su imagen se refleja a través de *m*? Encuentra la nueva imagen y distancia.

► ***Solución***

**a.** Según la conjetura de las reflexiones a través de rectas paralelas, la distancia entre *A* y *A″* es 26 cm, el doble de la distancia entre las rectas. Un dibujo verificará esto.



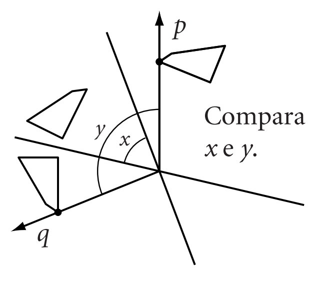

**b.** Según la conjetura de las reflexiones a través de rectas paralelas, la distancia entre *A* y *A″* es 26 cm. Un dibujo verificará esto.




## Investigación 2: Reflexiones a través de dos rectas que se intersecan

Sigue los Pasos 1–4 para reflejar una figura a través de una recta y después reflejar la imagen a través de una segunda recta que interseca a la primera.

Dibuja dos semirrectas *p* y *q* que comiencen en el punto de intersección de las dos rectas y que pasen por los puntos correspondientes de la figura original y su segunda imagen. ¿Qué transformación simple llevaría la figura original a la imagen final?




Debes haber encontrado que las dos reflexiones son equivalentes a una rotación simple. Usa un transportador para comparar el ángulo de rotación (es decir, el ángulo creado por las semirrectas *p* y *q*) con el ángulo agudo formado por las rectas que se intersecan. Usa tus descubrimientos para completar esta conjetura.

**Conjetura de las reflexiones a través de rectas que se intersecan** Una composición de dos reflexiones a través de un par de rectas que se intersecan es equivalente a una ______________ simple. El ángulo de ______________ es ______________ el ángulo agudo entre el par de rectas de reflexión que se intersecan. **C-71**

Existen muchas otras formas de combinar las transformaciones. Por ejemplo, la composición de una traslación y una reflexión se llama **reflexión de deslizamiento.** En la página 386 de tu libro se muestran ejemplos de la reflexión de deslizamiento.



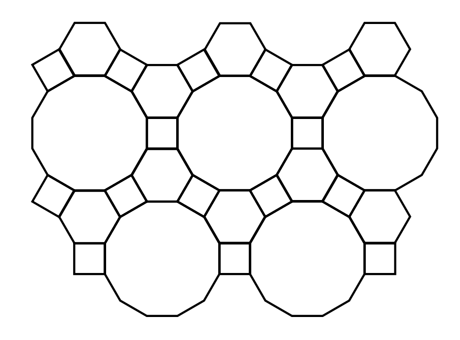

# Teselaciones con polígonos regulares

En esta lección

- Conocerás las tres **teselaciones regulares**
- Descubrirás todas las **teselaciones semirregulares** posibles

Un arreglo de formas que cubre completamente un plano sin huecos o traslapes se llama **teselación** o **embaldosado.** Lee el texto de tu libro que precede la investigación. He aquí un resumen de los puntos principales.

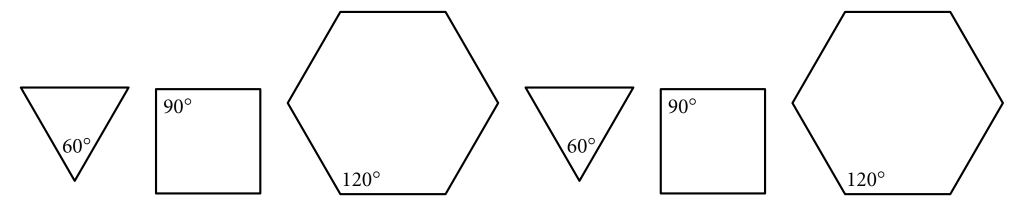
1. Para que las formas creen una teselación, sus ángulos, al acomodarse alrededor de un punto, deben tener medidas que sumen exactamente 360°.
2. Un embaldosado que usa sólo una forma se llama una **teselación monohedra.**
3. Una teselación monohedra de polígonos regulares congruentes se llama una **teselación regular.** Los únicos polígonos que crean una teselación regular son los triángulos equiláteros, los cuadrados, y los hexágonos regulares. (Éstos son los polígonos regulares cuyas medidas angulares son factores de 360°.)
4. Cuando las mismas combinaciones de dos o más polígonos regulares se juntan en el mismo orden en cada vértice de una teselación, se llama **teselación semirregular.**
5. Puedes describir una teselación dando su **orden de vértices** o su **nombre numérico.** Para darle nombre a una teselación, enumera el número de lados de cada forma, en orden según vayas avanzando alrededor de un vértice. Por ejemplo, cada vértice de la teselación aquí expuesta está rodeado por un cuadrado (4 lados), un hexágono (6 lados), y un dodecágono (12 lados). Así pues, el nombre numérico para esta teselación es 4.6.12.



## Investigación: Las teselaciones semirregulares

Existen ocho diferentes teselaciones semirregulares. En tu libro se muestran tres (4.8.8, 4.6.12, y 3.12.12). En esta investigación encontrarás las otras cinco. Las cinco son todas compuestas por combinaciones de triángulos, cuadrados y hexágonos.

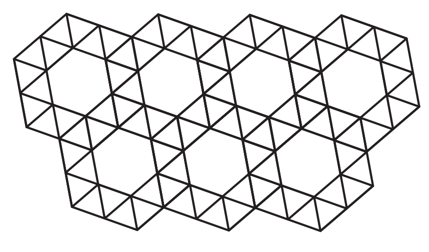
Necesitarás triángulos, cuadrados y hexágonos, ya sea de un conjunto de bloques de patrones, o trazados o copiados y recortados del conjunto siguiente. Si dispones de *software* de geometría, puedes usarlo en esta investigación.




**(continúa)**

Primero, busca combinaciones de *dos* polígonos que puedan usarse para crear una teselación semirregular. Comienza encontrando las combinaciones de medidas de ángulos que sumen 360°. Por ejemplo, como $4 \cdot 60° + 120° = 360°$, pueden arreglarse cuatro triángulos y un hexágono alrededor de un vértice. Trata de encontrar una manera de acomodar las formas en que el patrón pueda continuarse indefinidamente. (Recuerda que los polígonos deben unirse en el *mismo orden* en cada vértice.)

He aquí la teselación, rotulada con su nombre numérico.



3.3.3.3.6

Encuentra los otros cuatro teselaciones semirregulares que puedan formarse con dos polígonos diferentes. Dibuja cada una y rotúlala con su nombre numérico.

Ahora busca combinaciones de *tres* polígonos que puedan usarse para crear teselaciones semirregulares. Nuevamente, primero encuentra las combinaciones de medidas de ángulos que sumen 360° y después intenta hacer la teselación. Encuentra por lo menos una teselación semirregular que pueda formarse con tres polígonos diferentes. Dibújala y rotúlala con su nombre numérico.

Lee el texto restante de esta lección. A continuación se resumen los puntos claves.

1. Las tres teselaciones regulares y las ocho teselaciones semirregulares se llaman las **teselaciones arquimedianas.**
2. Las teselaciones regulares y semirregulares también se llaman las *teselaciones 1-uniformes* porque todos los vértices son idénticos. Una teselación con dos tipos de vértices se llama *2-uniforme,* una teselación con tres tipos de vértices se llama *3-uniforme,* etc. (Ve los ejemplos ilustrados de tu libro.)




# Teselaciones con polígonos no regulares

En esta lección

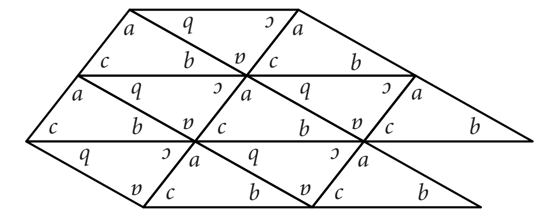
- Determinarás si todos los triángulos pueden acomodarse en teselaciones
- Determinarás si todos los cuadriláteros pueden acomodarse en teselaciones
- Buscarás algunos ejemplos de teselaciones pentagonales

En la Lección 7.4 investigaste las teselaciones formadas a partir de unos polígonos regulares. Ahora intentarás crear unas teselaciones a partir de unos polígonos no regulares.

## Investigación 1: ¿Todos los triángulos pueden acomodarse en teselaciones?

Sigue los pasos de "Making Congruent Triangles" (hacer tríangulos congruentes) en la página 394 de tu libro para crear y rotular 12 triángulos escalenos congruentes. Trata de formar una teselación usando los triángulos. He aquí un ejemplo.

Observa tu teselación y la teselación siguiente. Debes encontrar que, en ambos casos, cada ángulo cabe dos veces alrededor de cada punto vértice.



La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°. Como cada ángulo cabe dos veces alrededor de cada punto, la suma de las medidas de los ángulos alrededor de cada punto es 2(180°), ó 360°. Como viste en la Lección 7.4, ésta es la suma de los ángulos que rodean cada vértice en *cualquier* teselación.

¿Crees que podrías crear una teselación que use un triángulo isósceles? Inténtalo y ve qué sucede.

Tus descubrimientos en esta investigación conducen a la siguiente conjetura.

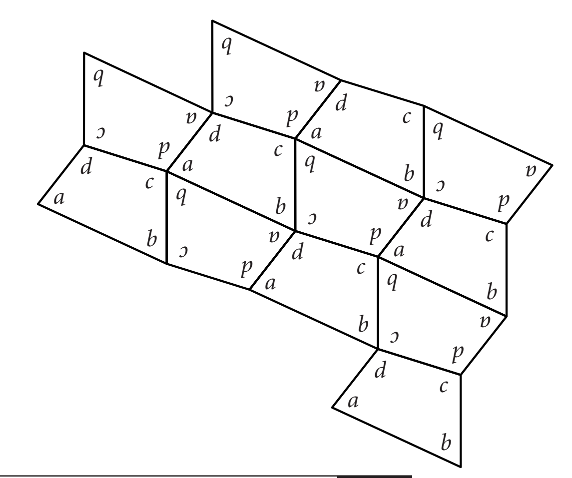
**Conjetura de los triángulos en teselación** Cualquier triángulo creará una teselación monohedra. **C-72**

Tú sabes que los cuadrados y los rectángulos pueden cubrir un plano y probablemente puedas visualizar unas teselaciones con paralelogramos. ¿Cualquier cuadrilátero puede acomodarse en teselación? En la siguiente investigación, explorarás esta pregunta.

**(continúa)**

## Investigación 2: ¿Todos los cuadriláteros pueden acomodarse en teselaciones?

Crea 12 cuadriláteros congruentes (ni paralelogramos ni trapecios) y rotula los ángulos correspondientes en cada cuadrilátero *a, b, c* y *d*. Trata de formar una teselación usando los cuadriláteros. He aquí un ejemplo.



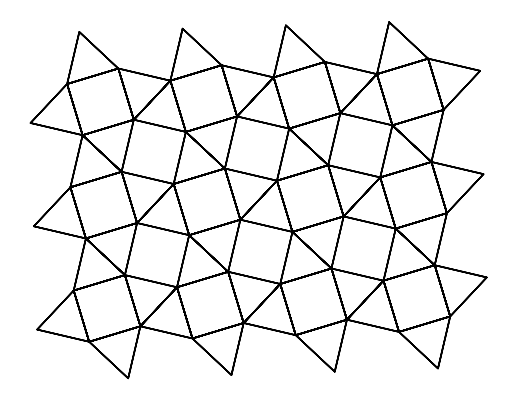
Mira tu teselación y la teselación mostrada aquí. Debes encontrar que, en ambos casos, cada ángulo cabe una vez alrededor de cada punto del vértice. Esto tiene sentido, porque la suma de las medidas de los ángulos de un cuadrilátero es 360°. Tus descubrimientos llevan a la siguiente conjetura.

**Conjetura de los cuadriláteros en teselación** Cualquier cuadrilátero creará una teselación monohedra. **C-73**

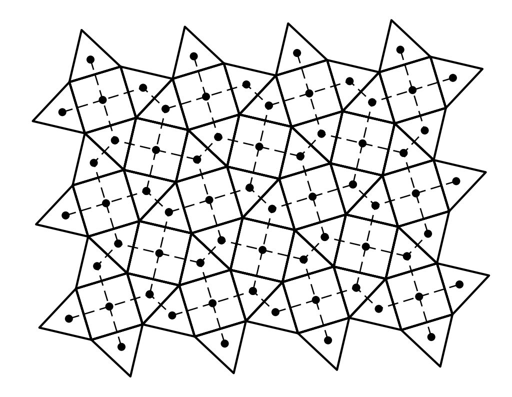
Tú sabes que un pentágono regular no se acomodará en teselación. Sin embargo, es posible crear teselaciones a partir de otros tipos de pentágonos. En las páginas 395 y 396 de tu libro, se muestran algunos ejemplos. Hasta ahora, se han mostrado 14 tipos de pentágonos que pueden acomodarse en teselaciones. En la actualidad no se sabe si existen más.

En el siguiente ejemplo, crearás una teselación pentagonal. Este ejemplo es el Ejercicio 2 de tu libro. Lee los Ejercicios 9 y 10 en la Lección 7.4 para una descripción de teselaciones duales.

***EJEMPLO*** Produce una teselación pentagonal creando el *dual* de la teselación semirregular expuesta aquí.



▶ ***Solución*** Recuerda que el dual se crea conectando los centros de los polígonos que rodean cada punto de vértice. Aquí está el resultado.





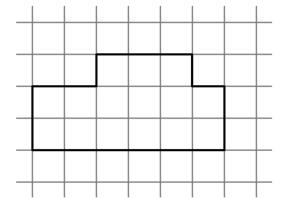

# Áreas de rectángulos y paralelogramos

En esta lección

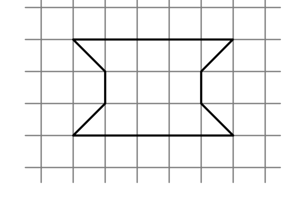
- Revisarás la fórmula del área de un rectángulo
- Usarás la fórmula del área de un rectángulo para encontrar las áreas de otras formas
- Descubrirás la fórmula del área de un paralelogramo

El **área** de una figura plana es el número del unidades cuadradas que pueden acomodarse de manera que llenen la figura completamente.

Es probable que ya conozcas varias fórmulas del área. Las investigaciones en este capítulo te ayudarán a comprender y recordar las fórmulas.



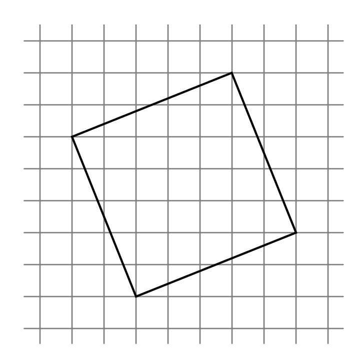
Área = 15 unidades cuadradas



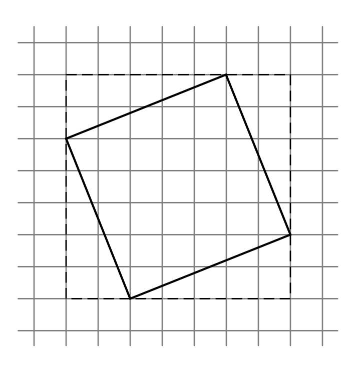
Área = 11 unidades cuadradas

En las páginas 422 y 423 de tu libro, se analiza la fórmula para el área de un rectángulo. Lee ese texto atentamente. Asegúrate de que comprendes los significados de **base** y **altura** y que la fórmula del área tiene sentido para ti, y después completa la conjetura del área de un rectángulo de tu libro. En el Ejemplo A de tu libro, se muestra cómo la fórmula del área para los rectángulos puede ayudarte a encontrar las áreas de otras formas. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO A*** Encuentra el área de este cuadrado.

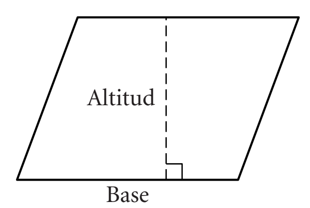


***Solución*** Rodea el cuadrado "inclinado" con un cuadrado de 7 por 7, con lados horizontales y verticales. Después resta el área de los cuatro triángulos rectángulos que se forman del área del cuadrado que rodea el cuadrado inclinado.



Cada uno de los cuatro triángulos es la mitad de un rectángulo de 2 por 5, de manera que cada uno tiene un área de $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5$, ó 5 unidades cuadradas. Por lo tanto, el área del cuadrado original es $(7 \cdot 7) - (4 \cdot 5) =$ 29 unidades cuadradas.

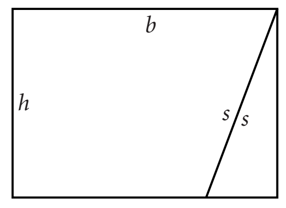
**(continúa)**




Al igual que con un rectángulo, cualquier lado de un paralelogramo puede llamarse *base*. Una **altitud** de un paralelogramo es cualquier segmento desde un lado del paralelogramo, perpendicular a ese lado, hasta una recta al lado opuesto. La *altura* de un paralelogramo es la longitud de la altitud. Estudia los diagramas de altitudes de la página 424 de tu libro.

## Investigación: Fórmula del área para paralelogramos

Sigue los Pasos 1 y 2 de la investigación de tu libro. En el Paso 2, cada nueva forma que hagas tendrá la misma área que el paralelogramo original, porque simplemente habrás reordenado las partes, sin añadir o eliminar ninguna pieza.




Forma un rectángulo con las dos partes.

Observa que la base y la altura del rectángulo son iguales que la base y la altura del paralelogramo original. Como las áreas del rectángulo y del paralelogramo son iguales, el área del paralelogramo es *bh*. Esto puede resumirse en una conjetura.

**Conjetura del área de un paralelogramo** El área de un paralelogramo se expresa por la fórmula $A = bh$, donde $A$ es el área, $b$ es la longitud de la base y $h$ es la altura del paralelogramo. **C-75**

Si las dimensiones de una figura se miden en pulgadas, pies o yardas, el área se mide en $\text{pulg}^2$ (pulgadas cuadradas), $\text{pies}^2$ (pies cuadrados) o $\text{yardas}^2$ (yardas cuadradas). Si las dimensiones se miden en centímetros o metros, el área se mide en $\text{cm}^2$ (centímetros cuadrados) o $\text{m}^2$ (metros cuadrados). Lee el Ejemplo B de tu libro y después lee el ejemplo siguiente.

***EJEMPLO B*** Un paralelogramo tiene una altura de 5.6 pies y un área de 70 $\text{pies}^2$. Encuentra la longitud de la base.

▶ ***Solución***

$A = bh$ Escribe la fórmula.

$70 = b(5.6)$ Sustituye los valores conocidos.

$\frac{70}{5.6} = b$ Resuelve para la longitud de la base.

$12.5 = b$ Divide.

La longitud de la base es 12.5 pies.




# Áreas de triángulos, trapecios y papalotes

En esta lección

- Descubrirás las fórmulas del área para triángulos, trapecios y papalotes

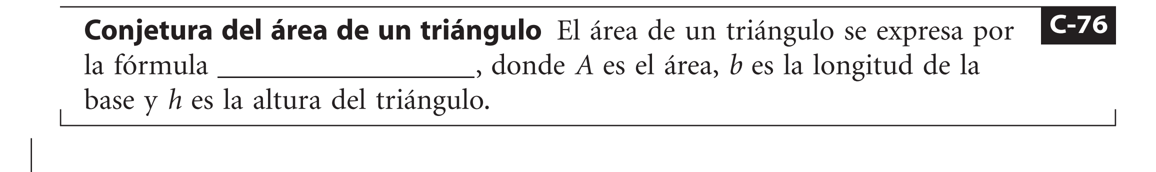
Puedes usar las fórmulas del área que ya conoces para derivar nuevas fórmulas de área. En la primera investigación te concentrarás en triángulos.

## Investigación 1: Fórmula del área para triángulos

Sigue el Paso 1 en tu libro para crear y rotular un par de triángulos congruentes.

Ya conoces la fórmula del área de rectángulos y paralelogramos. Acomoda los dos triángulos congruentes de manera que formen una de estas figuras. Escribe una expresión para el área de toda la figura. Después escribe una expresión para el área de uno de los triángulos.

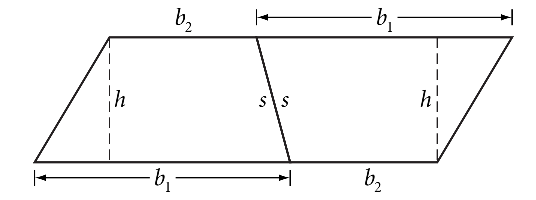
Resume tus descubrimientos completando la conjetura siguiente.


**Conjetura del área de un triángulo** El área de un triángulo se expresa por la fórmula ___________________, donde $A$ es el área, $b$ es la longitud de la base y $h$ es la altura del triángulo. **C-76**

A continuación, considerarás el área de un trapecio.

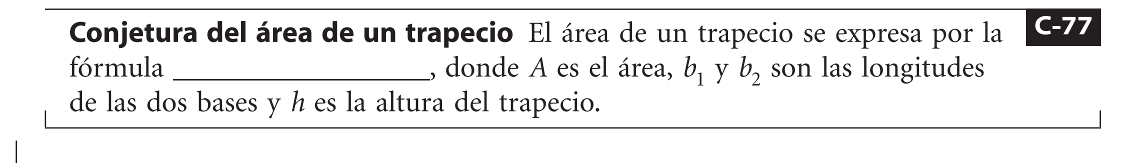
## Investigación 2: Fórmula del área de un trapecio

Sigue los Pasos 1 y 2 de tu libro para crear y rotular dos trapecios congruentes. Puedes acomodar los trapecios de manera que formen un paralelogramo.




¿Cuál es la longitud de la base del paralelogramo? ¿Cuál es la altura? Usa tus respuestas para escribir una expresión para el área del paralelogramo. Después usa la expresión del área del paralelogramo para escribir una expresión para el área de un trapecio.

Resume tus descubrimientos completando la siguiente conjetura.

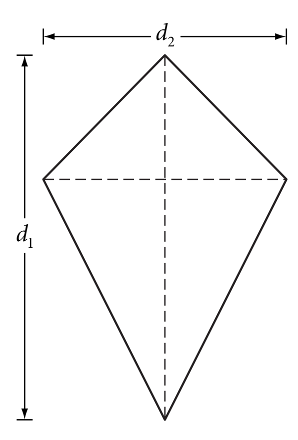

**Conjetura del área de un trapecio** El área de un trapecio se expresa por la fórmula ___________________, donde $A$ es el área, $b_1$ y $b_2$ son las longitudes de las dos bases y $h$ es la altura del trapecio. **C-77**

**(continúa)**

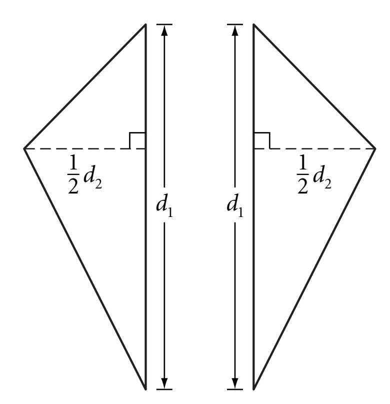
Finalmente considerarás el área de un papalote.

## Investigación 3: Fórmula del área de un papalote

Dibuja un papalote. Dibuja sus diagonales. Sea $d_1$ la longitud de la diagonal que conecta los ángulos del vértice y sea $d_2$ la longitud de la otra diagonal.




Recuerda que la diagonal que conecta los ángulos del vértice de un papalote lo divide en dos triángulos congruentes. Considera la diagonal rotulada $d_1$ como la base de uno de los triángulos. Después, como la diagonal que conecta los ángulos del vértice de un papalote es la mediatriz de la otra diagonal, la altura del triángulo es $\frac{1}{2}d_2$.




Escribe una expresión para el área de uno de los triángulos. Después usa la expresión del área del triángulo para escribir una expresión para el área del papalote.

Resume tus descubrimientos completando la siguiente conjetura.

**C-78**

**Conjetura del área de un papalote** El área de un papalote se expresa por la fórmula ___________________, donde $A$ es el área, y $d_1$ y $d_2$ son las longitudes de las diagonales.




# Problemas de área

En esta lección

- Usarás una diversidad de estrategias para aproximar las áreas de figuras con formas irregulares
- Usarás las fórmulas del área de las dos lecciones anteriores para hallar las áreas de figuras más complejas

Ya has descubierto fórmulas para las áreas de rectángulos, paralelogramos, triángulos, trapecios y papalotes. En esta lección usarás estas fórmulas, junto con otros métodos, para encontrar las áreas aproximadas de figuras con formas irregulares.

## Investigación: Solución de problemas con fórmulas del área

En la siguiente página, encontrarás ocho figuras geométricas. Para cada figura, encuentra una forma de calcular el área aproximada. Después anota el área y escribe una o dos oraciones explicando cómo la encontraste. Puede ser útil trazar la figura en otro papel.

A continuación se muestran algunas sugerencias de métodos para encontrar el área de cada figura. Lee estas sugerencias solamente si no puedes avanzar. Existen muchas maneras de encontrar cada área. Los métodos que uses pueden ser muy diferentes de los aquí descritos.

**Figura A** Divide la figura en dos rectángulos.

**Figura B** Esta figura es un papalote. Usa lo que aprendiste en la Lección 8.2 para encontrar el área.

**Figura C** Esta figura es un paralelogramo. Usa lo que aprendiste en la Lección 8.1 para hallar el área.

**Figura D** Divide la figura en triángulos.

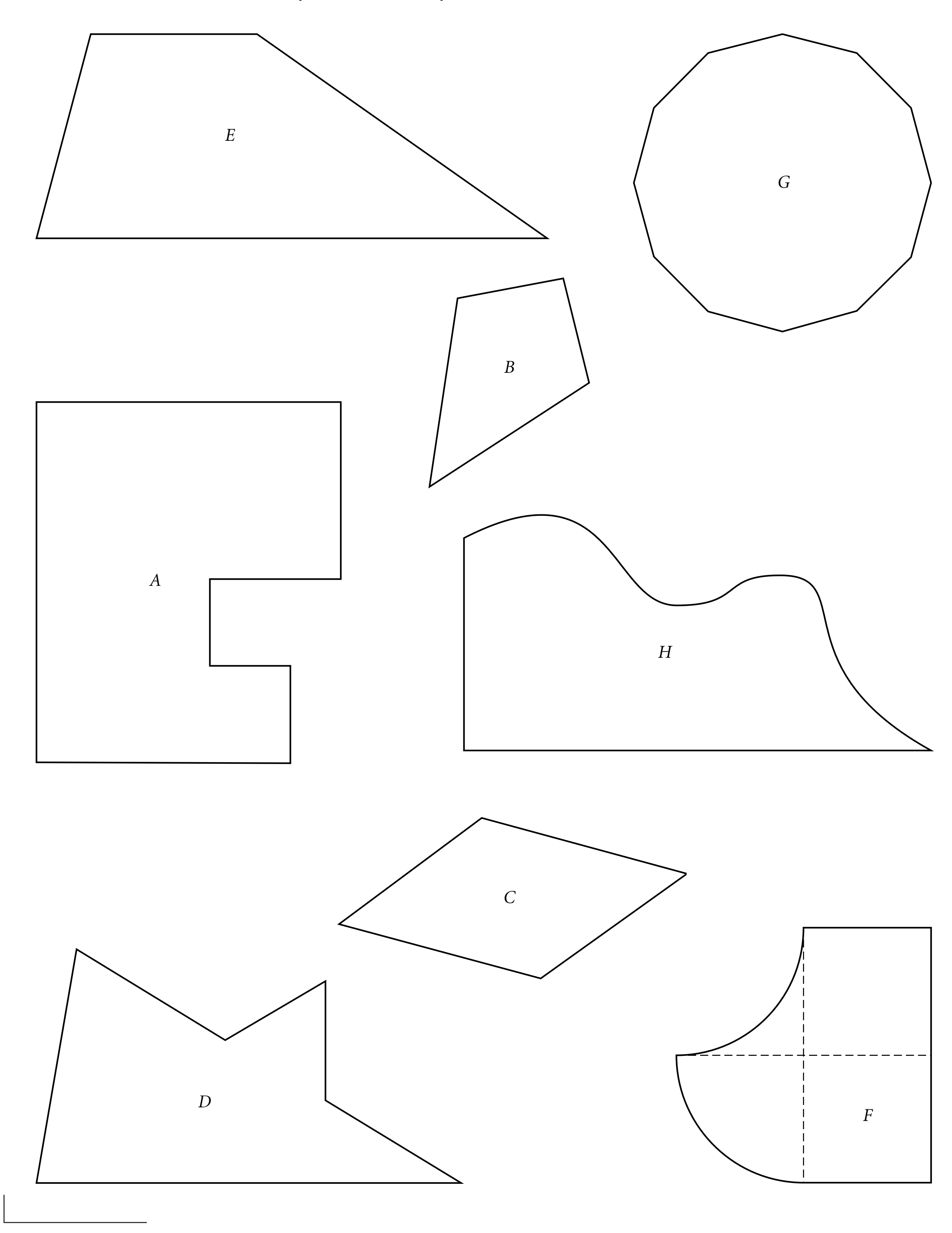
**Figura E** Esta figura es un trapecio. Usa lo que aprendiste en la Lección 8.2 para encontrar el área.

**Figura F** Encuentra el área de los dos cuadrados. Recorta las otras dos partes y reacomódalas para crear una forma reconocible.

**Figura G** Divide este dodecágono en 12 triángulos isósceles idénticos, con los ángulos del vértice en el "centro" del polígono.

**Figura H** Traza la figura en un papel cuadriculado. Estima el número de cuadrados que caben dentro de la figura. O bien, dibuja el rectángulo más grande que quepa dentro de la forma. Recorta las partes restantes y acomódalas para crear formas reconocibles.

**(continúa)**

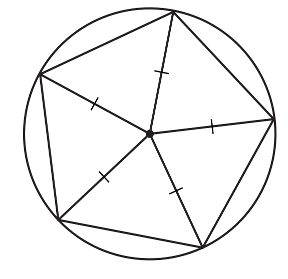

E
G
B
A
H
C
D
F




# Áreas de polígonos regulares

En esta lección

- Descubrirás la fórmula del área para polígonos regulares



Puedes dividir un polígono regular en triángulos isósceles congruentes, dibujando unos segmentos desde el centro del polígono a cada vértice. El centro del polígono es en realidad el centro del círculo circunscrito, entonces cada uno de estos segmentos congruentes se llaman radio del polígono regular.

En la investigación dividirás polígonos regulares en triángulos. Después escribirás una fórmula para el área de cualquier polígono regular.

## Investigación: Fórmula del área para polígonos regulares

La **apotema** de un polígono regular es un segmento perpendicular que va del centro del círculo circunscrito del polígono a un lado del polígono. La apotema es también la longitud del segmento. Sigue los pasos en tu libro para encontrar la fórmula del área de un polígono regular de $n$ lados, con lados de longitud $s$ y apotema $a$. Tus descubrimientos pueden resumirse en esta conjetura.

**C-79**

**Conjetura del área de un polígono regular** El área de un polígono regular se expresa por la fórmula $A = \frac{1}{2}asn$ o $A = \frac{1}{2}aP$, donde $A$ es el área, $P$ es el perímetro, $a$ es la apotema, $s$ es la longitud de cada lado y $n$ es el número de lados.

Los ejemplos siguientes te muestran cómo aplicar tus nuevas fórmulas.

***EJEMPLO A*** Un nonágono regular tiene un área de 302.4 cm$^2$ y una apotema de 9.6 cm. Encuentra la longitud de cada lado.

► ***Solución*** Como estás tratando de encontrar la longitud del lado, $s$, tal vez sea más fácil usar la fórmula $A = \frac{1}{2}asn$. También podrías usar $A = \frac{1}{2}aP$, resolver para $P$, y después dividir el resultado entre 9 (el número de lados).

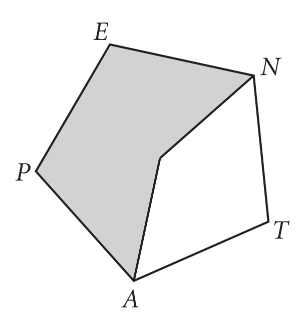
| | |
|---|---|
| $A = \frac{1}{2}asn$ | Escribe la fórmula. |
| $302.4 \approx \frac{1}{2}(9.6)(s)(9)$ | Sustituye los valores conocidos. |
| $302.4 \approx 43.2s$ | Multiplica. |
| $\frac{302.4}{43.2} \approx s$ | Resuelve para $s$. |
| $7 \approx s$ | Divide. |

Cada lado tiene aproximadamente 7 cm de largo.

**(continúa)**

***EJEMPLO B***

Encuentra el área sombreada del pentágono regular *PENTA*. La apotema mide aproximadamente 2.0 cm. El segmento *PE* mide aproximadamente 2.9 cm.




▶ ***Solución***

Primero, encuentra el área de todo el pentágono.

| | |
|---|---|
| $A = \frac{1}{2}asn$ | Escribe la fórmula. |
| $A \approx \frac{1}{2}(2.0)(2.9)(5)$ | Sustituye los valores conocidos. |
| $A \approx 14.5$ | Multiplica. |

El área del pentágono es aproximadamente 14.5 $\text{cm}^2$. La parte sombreada constituye $\frac{3}{5}$ del pentágono. (Si divides el pentágono en cinco triángulos isósceles, tres estarán sombreados.) Así pues, el área sombreada es de aproximadamente $\frac{3}{5} \cdot 14.5\ \text{cm}^2$, ó 8.7 $\text{cm}^2$.




# Áreas de círculos

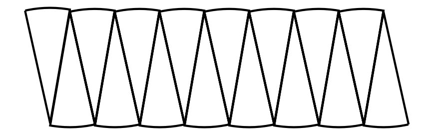
En esta lección

- Descubrirás la fórmula para el área de un círculo

Un rectángulo tiene lados rectos, mientras que un círculo es completamente curvo. Por eso, tal vez te sorprenda aprender que puedes usar la fórmula del área de un rectángulo para ayudarte a encontrar la fórmula del área de un círculo. En la siguiente investigación verás cómo.

## Investigación: Fórmula del área de un círculo

Sigue los Pasos 1–3 de tu libro para crear una figura como la siguiente.

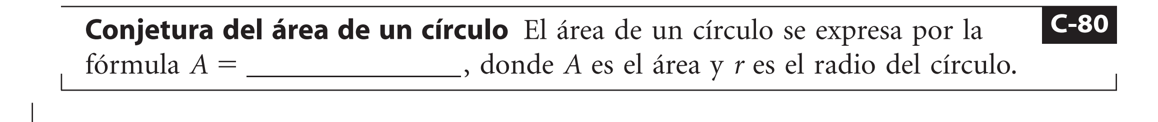


La figura se parece a un paralelogramo con dos lados desiguales. Si cortas el círculo en más cuñas, podrías acomodar estas cuñas más delgadas para que se parezca más a un rectángulo. No perderías ni ganarías área en este cambio, de manera que el área de este nuevo "rectángulo" sería la misma que el área del círculo original. Si pudieras cortar infinitas cuñas, en realidad tendrías un rectángulo de lados lisos.

Los dos lados más largos del rectángulo estarían constituidos por la circunferencia, $C$, del círculo. (Cada lado sería la mitad de la circunferencia.) Considera uno de estos lados como la base. Recuerda la fórmula de la circunferencia de un círculo que aprendiste en el Capítulo 6. Ahora usa esta fórmula para escribir la longitud de la base del rectángulo en términos de $r$, el radio del círculo original.

¿Qué relación hay entre la altura del rectángulo y el círculo original?

Recuerda que el área del rectángulo es igual que el área del círculo original. Usa esta idea y tus descubrimientos para completar esta conjetura.



**Conjetura del área de un círculo** El área de un círculo se expresa por la fórmula $A =$ ________________, donde $A$ es el área y $r$ es el radio del círculo. **C-80**

Los Ejemplos A y B de tu libro muestran cómo usar tu nueva conjetura. Lee estos ejemplos y después lee los ejemplos siguientes.

**(continúa)**

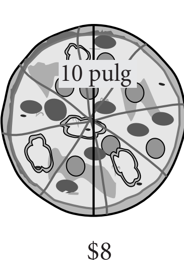
***EJEMPLO A*** La circunferencia de un círculo es de $22\pi$ pies. ¿Cuál es el área del círculo?

▶ ***Solución*** Usa la fórmula de la circunferencia para encontrar el radio. Después usa la fórmula del área para encontrar el área.

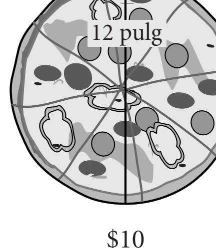
| | |
|---|---|
| $C = 2\pi r$ | Escribe la fórmula de la circunferencia. |
| $22\pi = 2\pi r$ | Sustituye los valores conocidos. |
| $11 = r$ | Resuelve para $r$. |
| $A = \pi r^2$ | Escribe una fórmula para el área. |
| $A = \pi(11)^2$ | Sustituye los valores conocidos. |
| $A = 121\pi$ | Simplifica. |

El área es de $121\pi$ pies$^2$, o aproximadamente 380.1 pies$^2$.

***EJEMPLO B*** En la pizzería de María, una pizza de pepperoni con un diámetro de 10 pulgadas cuesta \$8, y una pizza de pepperoni con un diámetro de 12 pulgadas cuesta \$10. ¿Cuál tamaño es una mejor compra?




$8




$10

▶ ***Solución*** Encuentra el área de cada pizza, y después encuentra el precio por pulgada cuadrada.

**Pizza de 10 pulgadas**

$A = \pi r^2$

$= \pi(5)^2$

$= 25\pi$

El área es de $25\pi$ pulg$^2$. Para encontrar el costo por pulgada cuadrada, divide el precio entre el área.

$\frac{8}{25\pi} \approx 0.10$

La pizza de 10 pulgadas cuesta aproximadamente 10¢ por pulgada cuadrada.

**Pizza de 12 pulgadas**

$A = \pi r^2$

$= \pi(6)^2$

$= 36\pi$

El área es de $36\pi$ pulg$^2$. Para encontrar el costo por pulgada cuadrada, divide el precio entre el área.

$\frac{10}{36\pi} \approx 0.09$

La pizza de 12 pulgadas cuesta aproximadamente 9¢ por pulgada cuadrada.

La pizza de 12 pulgadas cuesta menos por pulgada cuadrada, entonces la pizza de 12 pulgadas es una mejor compra.




# De cualquier forma que lo rebanes

En esta lección

- Aprenderás a encontrar el área de un sector, de un segmento y de una corona de un círculo

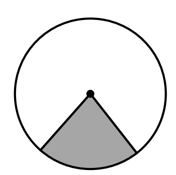
En la Lección 8.5, descubriste la fórmula para calcular el área de un círculo. En esta lección aprenderás cómo encontrar las áreas de tres tipos de secciones de un círculo.

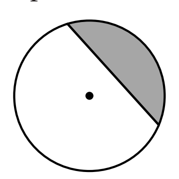
Un **sector de un círculo** es la región entre dos radios y un arco del círculo.

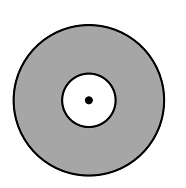
Un **segmento de un círculo** es la región entre una cuerda y un arco del círculo.

Una **corona circular** (*annulus*) es la región entre dos círculos concéntricos.

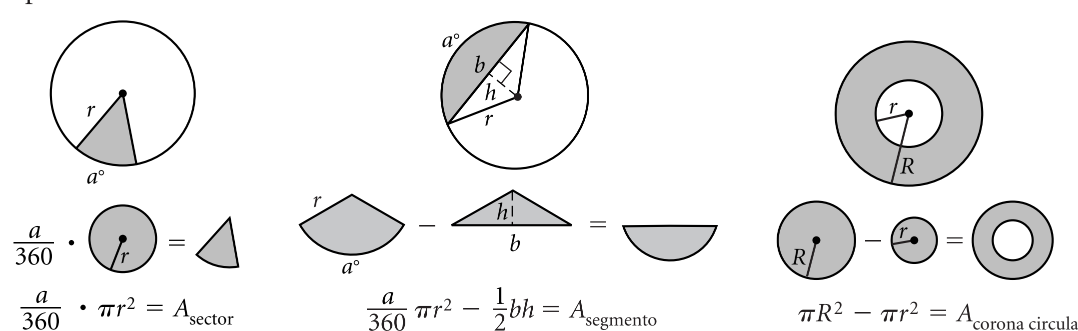
A continuación se ilustran los tres tipos de secciones.


Sector de un círculo


Segmento de un círculo


Corona circular

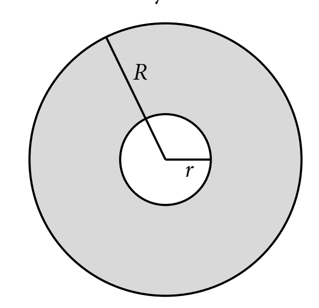
Las siguientes "ecuaciones ilustradas" te muestran cómo calcular el área de cada tipo de sección.




$\frac{a}{360} \cdot \pi r^2 = A_{\text{sector}}$ $\qquad \frac{a}{360}\pi r^2 - \frac{1}{2}bh = A_{\text{segmento}}$ $\qquad \pi R^2 - \pi r^2 = A_{\text{corona circular}}$

Lee los ejemplos de tu libro atentamente. Después lee los siguientes ejemplos.

***EJEMPLO A*** $R = 9$ cm y $r = 3$ cm. Encuentra el área de la corona circular.




**(continúa)**

**▶ Solución**

$A = \pi R^2 - \pi r^2$ La fórmula del área para una corona circular.

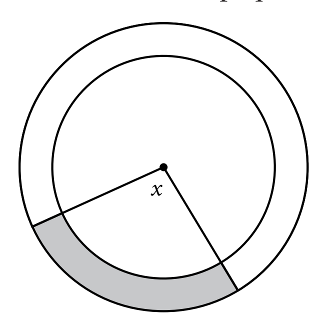
$= \pi(9)^2 - \pi(3)^2$ Sustituye los valores de $R$ y $r$.

$= 81\pi - 9\pi$ Evalúa los exponentes.

$= 72\pi$ Resta.

El área de la corona circular es de $72\pi$ cm$^2$, o aproximadamente 226 cm$^2$.

***EJEMPLO B*** El área sombreada es de $21\pi$ cm$^2$. El radio del círculo grande es de 12 cm, y el radio del círculo pequeño es de 9 cm. Encuentra $x$, la medida del ángulo central.




**▶ Solución**

Primero, encuentra el área de toda la corona circular.

$A = \pi R^2 - \pi r^2$ La fórmula del área para la corona circular.

$= \pi(12)^2 - \pi(9)^2$ Sustituye los valores de $R$ y $r$.

$= 63\pi$ Simplifica.

El área sombreada, $21\pi$ cm$^2$, es $\frac{x}{360}$ del área de la corona circular. Usa esta información para escribir y resolver una ecuación.

$$21\pi = \frac{x}{360} \cdot 63\pi$$

$$360 \cdot \frac{21\pi}{63\pi} = x$$

$$120 = x$$

La medida del ángulo central es 120°.



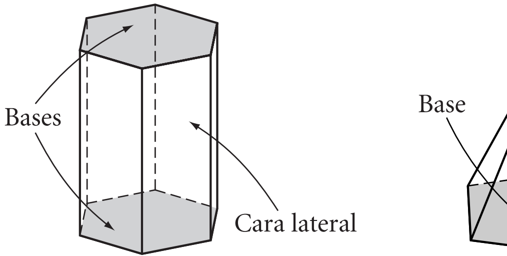

# Área superficial

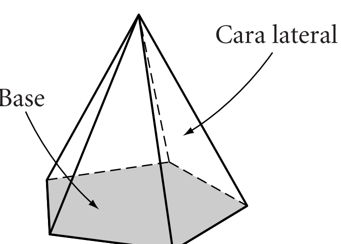
En esta lección

- Aprenderás cómo encontrar las áreas superficiales de prismas, pirámides, cilindros y conos

Puedes usar lo que sabes respecto a encontrar las áreas de figuras planas para encontrar las áreas superficiales de prismas, pirámides, cilindros y conos. El **área superficial** de cada uno de estos sólidos es la suma de las áreas de todas las caras o superficies que rodean el sólido. Las caras incluyen las **bases** del sólido y sus **caras laterales.**

En un prisma, las bases son dos polígonos congruentes y las caras laterales son rectángulos u otros paralelogramos. En una pirámide, la base puede ser cualquier polígono y las caras laterales son triángulos.

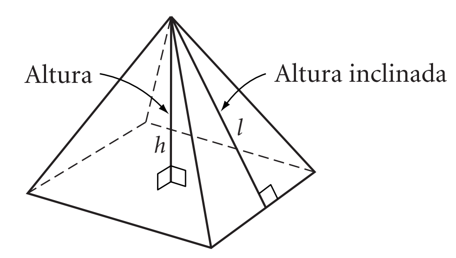



Lee "Steps for Finding Surface Area" (los pasos para encontrar el área superficial) en la página 462 de tu libro. El Ejemplo A muestra cómo encontrar el área superficial de un prisma rectangular. Lee el ejemplo atentamente.

Después lee el Ejemplo B, que muestra cómo encontrar el área superficial de un cilindro. Observa que, para encontrar el área de la superficie lateral del cilindro, necesitas imaginar cortar la superficie y aplanarla, de manera que obtengas un rectángulo. Como el rectángulo rodea exactamente la base circular, la longitud de la base del rectángulo es la circunferencia de la base circular.

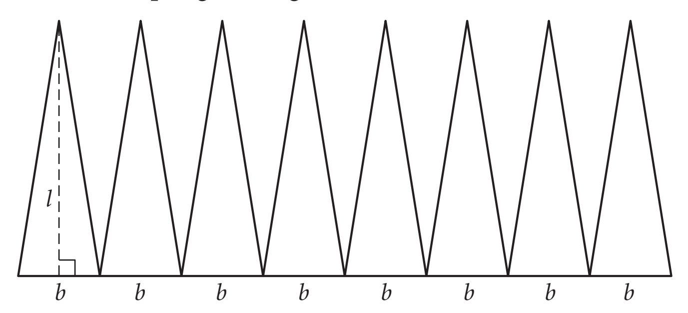
El área superficial de una pirámide es el área de la base, más las áreas de las caras triangulares. La altura de cada cara triangular se conoce como la **altura inclinada** (*slant height*). Usa $l$ para la altura inclinada y $h$ para la altura de la pirámide.

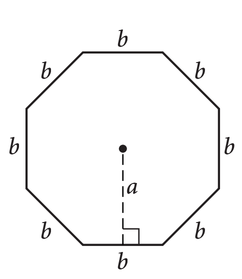



**(continúa)**

## Investigación 1: Área superficial de una pirámide regular

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles idénticos, y la base es un polígono regular.




Cada cara lateral es un triángulo con una longitud de base $b$ y una altura $l$. ¿Cuál es el área de cada cara?

Si la base es un $n$-ágono, entonces hay $n$ caras laterales. ¿Cuál es el área total de la superficie lateral de la pirámide?

¿Cuál es el área de la base en términos de $a$, $b$ y $n$?

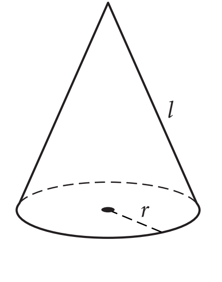
Usa tus expresiones para escribir una fórmula para el área superficial de una pirámide $n$-agonal regular en términos del número de lados $n$, la longitud de la base $b$, la altura inclinada $l$ y la apotema $a$.

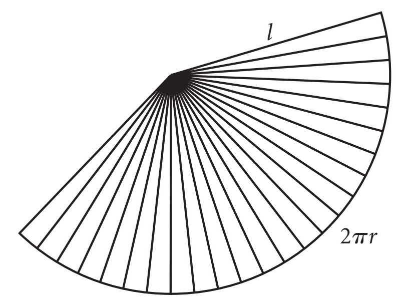
Usando el hecho de que el perímetro de la base es $nb$, escribe otra fórmula para el área superficial de una pirámide $n$-agonal regular en términos de la altura inclinada $l$, el apotema $a$ y el perímetro de la base, $P$.

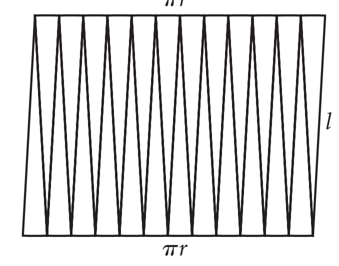
En la siguiente investigación encontrarás el área superficial de un cono con un radio $r$ y una altura inclinada $l$.

## Investigación 2: Área superficial de un cono

Al incrementarse el número de caras de una pirámide, ésta comienza a verse como un cono. Puedes concebir la superficie lateral como muchos triángulos delgados o como un sector de un círculo. Puedes reacomodar los triángulos para formar un rectángulo.



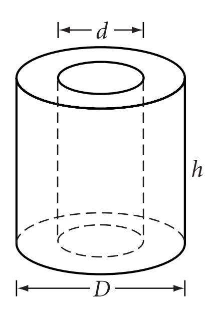

Usa los diagramas para ayudarte a escribir una fórmula para el área de la superficie lateral en términos de $r$ y $l$.

Usando la expresión para un área de la superficie lateral y una expresión para el área de la base, escribe una fórmula para el área superficial del cono.

(continúa)

El Ejemplo C de tu libro te muestra cómo aplicar la fórmula para el área superficial de un cono. Lee el Ejemplo C atentamente. Después lee el ejemplo siguiente.

***EJEMPLO*** Encuentra el área superficial de este sólido. $D = 10$, $d = 6$, $h = 14$.




▶ ***Solución*** El área superficial es el área de la superficie lateral del cilindro externo, más el área de la superficie lateral del cilindro interno, más el área de las dos bases, que son coronas circulares.

$$\text{Área de la superficie lateral del cilindro externo} = 2\pi\left(\frac{D}{2}\right)h = 2\pi\left(\frac{10}{2}\right)(14) = 140\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área de la superficie lateral del cilindro interno} = 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)h = 2\pi\left(\frac{6}{2}\right)(14) = 84\pi \text{ cm}^2$$

$$\text{Área de una base} = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$= \pi\left(\frac{10}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 16\pi \text{ cm}^2$$

Entonces,

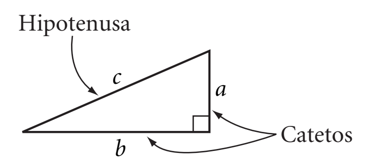
$$\text{Área superficial total} = 140\pi + 84\pi + 2(16\pi) = 256\pi \text{ cm}^2 \approx 804 \text{ cm}^2.$$




# El Teorema de Pitágoras

En esta lección

- Conocerás el **Teorema de Pitágoras,** que establece la relación entre las longitudes de los catetos y la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo
- Resolverás un **rompecabezas de disección** que te ayudará a comprender el Teorema de Pitágoras
- Leerás una **prueba** del Teorema de Pitágoras
- Usarás el Teorema de Pitágoras para **resolver problemas**




En un triángulo rectángulo, el lado opuesto al ángulo recto se llama la **hipotenusa** y los otros lados se llaman **catetos** (*legs*). En la figura, $a$ y $b$ son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo, y $c$ es la longitud de la hipotenusa. Hay una relación especial entre las longitudes de los catetos y la longitud de la hipotenusa. Esta relación se conoce como el Teorema de Pitágoras.

## Investigación: Los tres lados de un triángulo rectángulo

En esta investigación resolverás un rompecabezas geométrico que te ayudará a comprender el Teorema de Pitágoras. Usarás una **disección**, cortando una figura y volviendo a juntar las piezas para formar una nueva figura.

Construye un triángulo rectángulo escaleno en el medio de una hoja de papel. Rotula los dos catetos $a$ y $b$ y rotula la hipotenusa $c$. Construye un cuadrado sobre cada lado del triángulo para que los cuadrados no se superpongan con el triángulo. ¿Cuál es la superficie de cada cuadrado en término de su longitud?

Ahora sigue los Pasos 2–4 de tu libro.

Después de armar con éxito el rompecabezas del Paso 4, explica la relación que hay entre las áreas de los tres cuadrados. Después usa esta relación para completar el enunciado del Teorema de Pitágoras.




**El Teorema de Pitágoras** En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual __________________.

Si $a$ y $b$ son las longitudes de los dos catetos de un triángulo rectángulo y $c$ es la longitud de la hipotenusa, entonces una manera conveniente de escribir el Teorema de Pitágoras es $a^2 + b^2 = c^2$

**(continúa)**

Un **teorema** es una conjetura que se ha probado. Hay más de 200 pruebas conocidas del Teorema de Pitágoras. Tu libro proporciona una prueba. Lee la prueba en la página 479 de tu libro y asegúrate de que puedes explicar cada paso.

En la página 480 de tu libro se dan algunos ejemplos que ilustran que la relación pitagórica, $a^2 + b^2 = c^2$, no se mantiene en triángulos acutángulos ni obtusángulos.

Puedes usar el Teorema de Pitágoras para resolver problemas relacionados con triángulos rectángulos. Lee los Ejemplos A y B de tu libro y después lee los ejemplos siguientes.

***EJEMPLO A*** Una cancha de fútbol olímpica es un rectángulo de 100 metros de largo y 70 metros de ancho. ¿Qué longitud tiene la diagonal de la cancha?

▶ ***Solución*** La diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, con catetos de longitudes 70 m y 100 m. Puedes usar el Teorema de Pitágoras para encontrar su longitud.

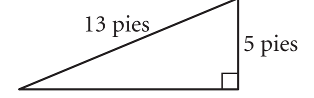
c
70 m
100 m

| | |
|---|---|
| $a^2 + b^2 = c^2$ | La fórmula de Pitágoras. |
| $70^2 + 100^2 = c^2$ | Sustituye los valores conocidos. |
| $4{,}900 + 10{,}000 = c^2$ | Eleva los términos al cuadrado. |
| $14{,}900 = c^2$ | Suma. |
| $122 \approx c$ | Saca la raíz cuadrada positiva de cada lado. |

La diagonal tiene una longitud aproximada de 122 metros.

***EJEMPLO B*** ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo con un cateto de 5 pies de longitud y una hipotenusa de 13 pies de longitud?

▶ ***Solución*** Puedes considerar los dos catetos como la base y la altura del triángulo. La longitud de un cateto es 5 pies. Para encontrar la longitud del otro cateto, usa el Teorema de Pitágoras.




| | |
|---|---|
| $a^2 + b^2 = c^2$ | La fórmula de Pitágoras. |
| $5^2 + b^2 = 13^2$ | Sustituye. |
| $25 + b^2 = 169$ | Eleva los términos al cuadrado. |
| $b^2 = 144$ | Resta 25 de ambos lados. |
| $b = 12$ | Saca la raíz cuadrada positiva de cada lado. |

El otro cateto tiene una longitud de 12; entonces el área es $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12$, ó 30 pies cuadrados.




# El recíproco del Teorema de Pitágoras

En esta lección

- Experimentarás con los **triples pitagóricos** para determinar si el recíproco del Teorema de Pitágoras parece ser cierto
- Probarás **el recíproco del Teorema de Pitágoras**
- Usa el recíproco del Teorema de Pitágoras para determinar si un triángulo es un triángulo rectángulo

En la Lección 9.1, aprendiste el Teorema de Pitágoras, que establece que si un triángulo es rectángulo, entonces el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos. ¿Crees que el recíproco es cierto? En otras palabras, si las longitudes de los lados de un triángulo funcionan según la ecuación de Pitágoras, ¿el triángulo debe ser un triángulo rectángulo? Explorarás esta cuestión en la investigación.

## Investigación: ¿Es cierto el recíproco?

Para esta investigación necesitarás un cordón, tres clips para papel y dos ayudantes. Si nadie te puede ayudar, necesitarás un cordón, algunos alfileres o tachuelas, y una hoja grande de cartulina gruesa.

Un conjunto de tres enteros positivos que satisfacen la fórmula de Pitágoras se conoce como un **triple pitagórico.** Por ejemplo, los enteros 3, 4 y 5 son un triple pitagórico como $3^2 + 4^2 = 5^2$.

En la página 484 de tu libro, se enumeran nueve ejemplos de triples pitagóricos. Selecciona un triple de la lista, y delimita cuatro puntos, *A, B, C* y *D,* en un cordón para crear tres longitudes consecutivas a partir de tu conjunto de triples. (Deja algo del cordón a la izquierda de *A* y a la derecha de *D,* de manera que puedas hacer un nudo.) Por ejemplo, si escoges 5, 12, 13, podrías marcar tu cordón así:

A B C D
5 pulg | 12 pulg | 13 pulg

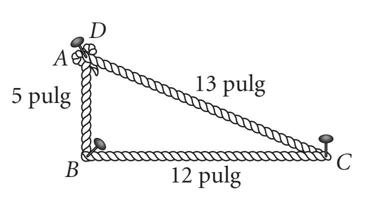
Amarra los extremos del cordón de manera que los puntos *A* y *D* se junten.

Si estás trabajando con otras dos personas:

- Asegura tres clips sobre el cordón.
- Cada persona jala un clip cada uno, en el punto *A, B* o *C,* para estirar el cordón y formar un triángulo. (Consulta la fotografía de tu libro.)
- Mide el ángulo más grande del triángulo. ¿Qué tipo de triángulo se forma?

Si estás trabajando solo:

- Fija el cordón a la cartulina en uno de los puntos señalados.
- Estira la parte del cordón entre el punto fijo y el siguiente punto señalado. Sujeta ese punto. Después jala el tercer punto señalado para estirar el cordón y formar un triángulo. Sujeta ese punto.




**(continúa)**

- Mide el ángulo más grande del triángulo. ¿Qué tipo de triángulo se forma?

Selecciona al menos otro triple de la lista y repite el experimento.

Tus resultados pueden resumirse en una conjetura.

**El recíproco del Teorema de Pitágoras** Si las longitudes de los tres lados de un triángulo satisfacen la ecuación de Pitágoras, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo. **C-82**

______________

En la página 486 de tu libro, lee el comienzo de una prueba del recíproco del Teorema de Pitágoras. Después completa la prueba usando el siguiente modelo.

$\triangle DEF$ es un triángulo rectángulo. Entonces, según el Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = x^2$, pero a nosotros se nos dio $a^2 + b^2 = c^2$.

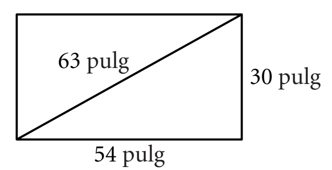
Por lo tanto, al sustituir, $x^2 =$ ______________ .

Saca la raíz cuadrada de cada lado para obtener ______________ $=$ ______________ .

Ahora sabemos que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ según ______________ , entonces $\angle C \cong \angle F$ según ______________ . Así, $m\angle C = m\angle F = 90°$, entonces $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo.

***EJEMPLO*** Luís quería construir un corral rectangular para su conejillo de Indias. Cuando terminó, midió el fondo del corral. Encontró que un lado tenía 54 pulgadas de largo, el lado adyacente tenía 30 pulgadas de largo y una diagonal medía 63 pulgadas de largo. ¿El corral es realmente rectangular?

► ***Solución*** Si el corral es rectangular, entonces dos lados adyacentes y una diagonal formarán un triángulo rectángulo. Para ver si éste es el caso, verifica si las medidas forman un triple pitagórico.




$30^2 + 54^2 = 900 + 2916 = 3816$ y $63^2 = 3969$

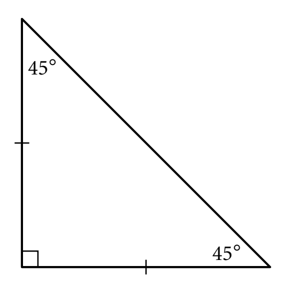
Como $30^2 + 54^2 \neq 63^2$, las medidas no son un triple pitagórico, así que el triángulo no es un triángulo rectángulo. Por lo tanto, el corral no es rectangular.




# Dos triángulos rectángulos especiales

En esta lección

- Descubrirás un medio rápido para hallar la longitud desconocida de un lado en un **triángulo rectángulo isósceles** (también llamado **triángulo 45°-45°-90°**)
- Descubrirás un medio rápido para encontrar la longitud desconocida de un lado en un **triángulo 30°-60°-90°**




Un triángulo rectángulo isósceles a veces se conoce como triángulo 45°-45°-90°, debido a las medidas de sus ángulos. Observa que un triángulo rectángulo isósceles es la mitad de un cuadrado. En la siguiente investigación descubrirás la relación existente entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo isósceles.

## Investigación 1: Triángulos rectángulos isósceles

El triángulo rectángulo isósceles ilustrado aquí tiene unos catetos de longitud $l$ y una hipotenusa de longitud $h$. Si conoces el valor de $l$, puedes usar el Teorema de Pitágoras para encontrar $h$. He aquí dos ejemplos.

- Si $l$ es 5, entonces $h^2 = 5^2 + 5^2 = 50$, de manera que $h = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$.
- Si $l$ es 8, entonces $h^2 = 8^2 + 8^2 = 128$, de manera que $h = \sqrt{128} = \sqrt{64 \cdot 2} = 8\sqrt{2}$.

Halla el valor de $h$ para al menos otros tres valores enteros de $l$. Simplifica la raíz cuadrada, pero déjala en forma de radical.

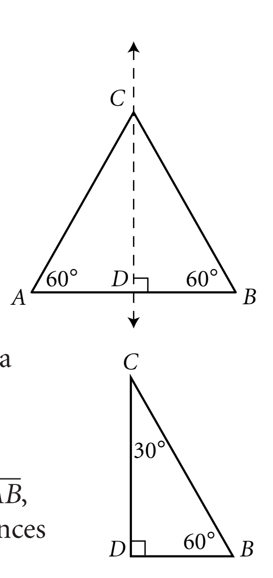
Busca un patrón en la relación entre l y h. Resume tus descubrimientos completando esta conjetura.



**Conjetura del triángulo rectángulo isósceles** En un triángulo rectángulo isósceles, si los catetos tienen longitud $l$, entonces la hipotenusa tiene longitud ________________. **C-83**



Si doblas un triángulo equilátero a lo largo de una de sus rectas de simetría, obtienes un triángulo 30°-60°-90°. $\triangle ABC$ es equilátero y $\overline{CD}$ es una bisectriz de ángulo como se muestra a la derecha. Prueba que $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ y después responde a las preguntas de la página 492 de tu libro. Puedes verificar tus respuestas con las siguientes respuestas de muestra.




1. ¿Por qué los ángulos en $\triangle BCD$ deben ser de 30°, 60° y 90°?

   $m\angle B = 60°$ porque $\triangle ABC$ es equilátero y por lo tanto equiángulo. Con el mismo razonamiento, $m\angle ACB = 60°$, y la bisectriz de ángulo $\overline{CD}$ lo corta en dos ángulos congruentes, entonces $m\angle ACD = 30°$ y $m\angle BCD = 30°$. Usando la conjetura de la suma de un triángulo, $m\angle CDB = 90°$.

2. ¿Cómo se compara $BD$ con $AB$? ¿Cómo se compara $BD$ con $BC$?

   Según la conjetura de la bisectriz del ángulo del vértice, $\overline{CD}$ es una mediana $\overline{AB}$, entonces $AD = BD$ y $BD = \frac{1}{2}$ AB. Como $\triangle ABC$ es equilátero, $AB = BC$, entonces $BD = \frac{1}{2}\ BC$.

**(continúa)**

3. En cualquier triángulo 30°-60°-90°, ¿cómo se compara la longitud de la hipotenusa conla longitud del cateto más corto?

   La longitud de la hipotenusa es dos veces más larga que la longitud del cateto más corto.

## Investigación 2: Triángulos 30°-60°-90°

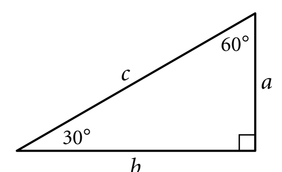
A continuación hay un triángulo 30°-60°-90°. Si conoces la longitud del cateto más corto, *a*, puedes encontrar la longitud de los otros lados. Por ejemplo, si *a* es 3, entonces la hipotenusa, *c*, es 6. Usa la fórmula de Pitágoras para encontrar la longitud del otro cateto, *b*.

$3^2 + b^2 = 6^2$

$9 + b^2 = 36$

$b^2 = 27$

$b = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$




La longitud del cateto *b* es $3\sqrt{3}$ unidades.

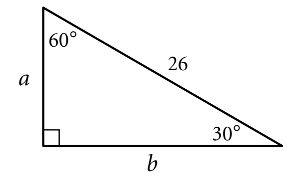
Copia la tabla del Paso 2 de la Investigación 2, y repite el procedimiento anterior para completar la tabla. Escribe la longitud del cateto más largo en una forma radical simplificada. Busca un patrón entre las longitudes de los catetos de cada triangulo. Usa tus observaciones para completar la conjetura.

**Conjetura del triángulo 30°-60°-90°** En un triángulo 30°-60°-90°, si el cateto más corto tiene una longitud *a*, entonces el cateto más largo tiene una longitud ___________________ y la hipotenusa tiene una longitud 2*a*. **C-84**

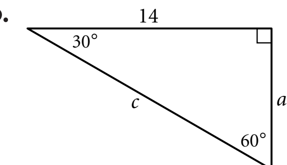
En la página 493 de tu libro, hay una prueba de la conjetura del triángulo 30°-60°-90°. Lee la prueba y asegúrate de comprenderla. Luego lee el ejemplo siguiente.

***EJEMPLO*** Halla las longitudes de los lados señalados con letras. Todas las longitudes están en centímetros.

**a.**




**b.**




▶ ***Solución***

**a.** La longitud del cateto más corto es la mitad de la longitud de la hipotenusa, de manera que $a = 13$ cm. La longitud del cateto más largo es la longitud del cateto más corto multiplicada por $\sqrt{3}$, así que $b = 13\sqrt{3}$ cm, o aproximadamente 22.5 cm.

**b.** La longitud del cateto más largo es la longitud del cateto más corto multiplicada por $\sqrt{3}$, de manera que $14 = a\sqrt{3}$ y $a = \frac{14}{\sqrt{3}}$ cm, o aproximadamente 8.1 cm. La longitud de la hipotenusa es dos veces la longitud del cateto más corto, así que $c = \frac{28}{\sqrt{3}}$ cm, o aproximadamente 16.2 cm.




# Problemas prácticos

En esta lección

- Usarás el Teorema de Pitágoras para **resolver problemas**

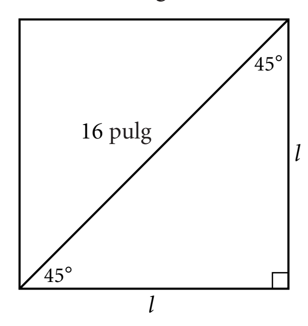
Puedes usar el Teorema de Pitágoras para resolver muchos problemas relacionados con los triángulos rectángulos.

Lee el ejemplo de tu texto. Observa que el problema en ese ejemplo requiere aplicar el Teorema de Pitágoras dos veces: primero para encontrar la diagonal del fondo de la caja y después para encontrar la diagonal de la caja.

En los ejemplos siguientes, trata de resolver cada problema por tu cuenta, antes de leer la solución.

***EJEMPLO A*** Un cuadrado tiene una diagonal de una longitud de 16 pulgadas. ¿Cuál es el área del cuadrado?

***▶ Solución*** La diagonal de un cuadrado divide el cuadrado en dos triángulos 45°-45°-90°. Para encontrar el área del cuadrado, necesitas conocer la longitud del cateto, *l*, de los triángulos.




Según la conjetura del triángulo rectángulo isósceles (o según el Teorema de Pitágoras), sabes que $l \cdot \sqrt{2} = 16$, así que $l = \frac{16}{\sqrt{2}}$ pulg. Por lo tanto,

$$\text{Área del cuadrado} = \frac{16}{\sqrt{2}} \cdot \frac{16}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{256}{2}$$

$$= 128$$

Así que el área del cuadrado es 128 $\text{pulg}^2$.

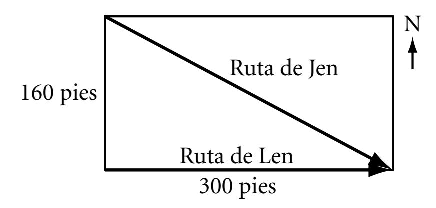
**(continúa)**

***EJEMPLO B***

La banda de marcha de la Clementina High School ensaya en la cancha de fútbol de la escuela. La cancha mide 300 pies de largo de oeste a este y 160 pies de ancho de norte a sur. Len comienza en la esquina sudoeste y marcha a una velocidad de 5 pies por segundo hacia la esquina sudeste. Al mismo tiempo, Jen comienza a marchar diagonalmente de la esquina nordoeste a la esquina sudeste. Si desean reunirse en la esquina en el mismo instante, ¿a qué velocidad debe marchar Jen?

► ***Solución***

Para empezar, haz un dibujo para ilustrar el problema.




Len marcha 300 pies a una velocidad de 5 pies por segundo, así que le tomará $300 \div 5$, ó 60 segundos, para llegar a la esquina sudeste.

Para que se encuentren al mismo tiempo, Jen también debe cubrir su ruta en 60 segundos. Para hallar la distancia que Jen debe marchar, usa el Teorema de Pitágoras.

$$160^2 + 300^2 = x^2$$

$$25{,}600 + 90{,}000 = x^2$$

$$115{,}600 = x^2$$

$$340 = x$$

Jen debe cubrir 340 pies en 60 segundos, así que debe marchar a una velocidad de $340 \div 60$, o aproximadamente 5.7 pies por segundo.

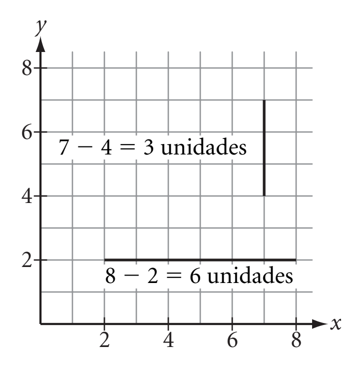



# La distancia en la geometría de coordenadas

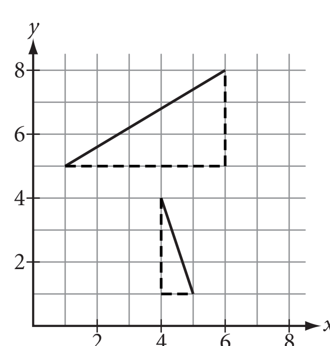
En esta lección

- Aprenderás una fórmula para encontrar la **distancia entre dos puntos** sobre un plano de coordenadas
- Descubrirás la **ecuación general de un círculo**

En un plano de coordenadas, puedes encontrar la longitud de un segmento en la dirección *x*, contando los cuadros de la cuadrícula o restando coordenadas *x*. De manera similar, puedes encontrar la longitud de un segmento en la dirección *y* contando o restando coordenadas *y*.



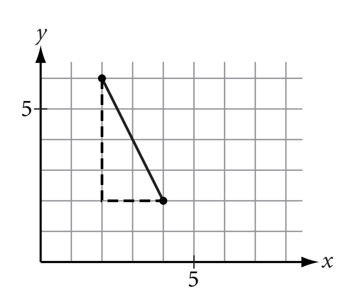

Puedes pensar en cualquier segmento que no esté en la dirección *x* o *y* como la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos en las direcciones *x* e *y*. Esto te permite usar el Teorema de Pitágoras para encontrar la longitud del segmento.




En la siguiente investigación usarás esta idea para desarrollar una fórmula para la distancia entre cualesquier dos puntos en un plano de coordenadas.

## Investigación: La fórmula de la distancia

El Paso 1 de tu libro muestra cuatro segmentos sobre unos planos de coordenadas. Encuentra la longitud de cada segmento, considerando que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Por ejemplo, el segmento en la parte a es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos de longitudes de 2 unidades y 4 unidades, así que, usando el Teorema de Pitágoras,




$$\text{longitud}^2 = 2^2 + 4^2$$

$$= 20$$

$$\text{longitud} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.5 \text{ unidades}$$

En el Paso 2 debes graficar y conectar los puntos y luego encontrar la distancia entre ellos. Puedes encontrar la distancia usando el procedimiento que usaste en el Paso 1.

Considera los puntos $A(15, 34)$ y $B(42, 70)$. No sería práctico graficar estos puntos en una cuadrícula, así que ¿cómo podrías encontrar la distancia entre ellos?

**(continúa)**

Recuerda que puedes hallar una distancia horizontal restando coordenadas *x*, y una distancia vertical restando coordenadas *y*. Usa esta idea para completar los Pasos 3–5 de tu libro y encontrar la distancia entre los puntos $A(15, 34)$ y $B(42, 70)$.

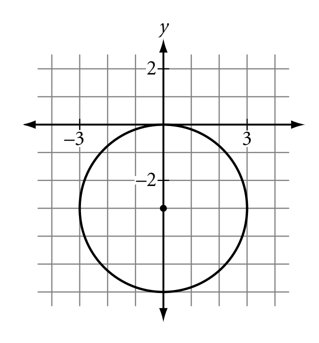
Puedes generalizar tus descubrimientos en esta investigación en una conjetura.

**Fórmula de la distancia** La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se expresa por la fórmula $(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ o $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. **C-85**

El Ejemplo A de tu libro muestra cómo aplicar la fórmula de la distancia. Lee el Ejemplo A.

El Ejemplo B de tu libro muestra cómo usar la fórmula de la distancia para escribir la ecuación de un círculo con el centro (5, 4) y el radio 7 unidades. La solución usa el hecho de que el círculo es el conjunto de todos los puntos $(x, y)$ que se sitúan a 7 unidades del punto fijo (5, 4). Lee el Ejemplo B y después lee los siguientes ejemplos.

***EJEMPLO*** Escribe la ecuación para el círculo a la derecha.




▶ ***Solución*** El círculo tiene centro $(0, -3)$ y radio de 3 unidades. Supongamos que $(x, y)$ representa cualquier punto en el círculo. La distancia desde $(x, y)$ al centro del círculo, $(0, -3)$, es 3. Sustituye esta información en la fórmula de distancia.

$(x - 0)^2 + (y - (-3))^2 = 3^2$, o $x^2 + (y + 3)^2 = 3^2$

En la mini investigación en el Ejercicio 11, desarrollarás la ecuación general para un círculo.




# Círculos y el Teorema de Pitágoras

En esta lección

- Usarás las **conjeturas del círculo** y el **Teorema de Pitágoras** para resolver problemas

En el Capítulo 6, descubriste varias propiedades de los círculos que tienen que ver con ángulos rectos. He aquí dos de las conjeturas de ese capítulo.

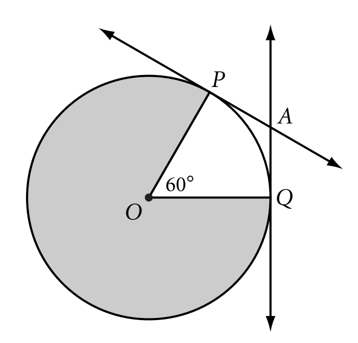
**Conjetura de la tangente:** Una tangente a un círculo es perpendicular al radio trazado hasta el punto de tangencia.

**Conjetura de los ángulos inscritos en un semicírculo:** Los ángulos inscritos en un semicírculo son ángulos rectos.

Puedes usar estas y otras conjeturas de círculo y el Teorema de Pitágoras para resolver algunos problemas difíciles.

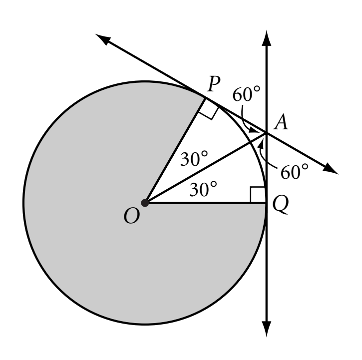
Los Ejemplos A y B de tu libro usan conjeturas de círculo, disecciones, relaciones de triángulos rectángulos especiales y el Teorema de Pitágoras. Lee estos ejemplos y sigue cada paso en las soluciones. A continuación hay otros dos ejemplos.

***EJEMPLO A*** $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{AQ}$ son tangentes al círculo *O*, y $AP = 3$ cm. Encuentra el área de la región sombreada.




▸ ***Solución*** Puedes dibujar $\overline{OA}$ para crear dos triángulos 30°-60°-90°. (¿Cómo sabes que el segmento biseca a $\angle O$ para crear dos ángulos de 30°?)

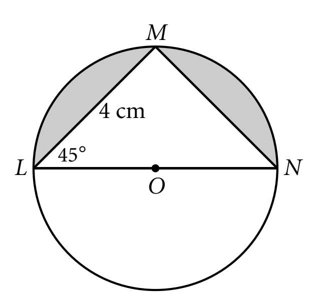
En $\triangle APO$, el cateto más corto, $\overline{AP}$, tiene una longitud de 3 cm, de manera que el cateto más largo, que es el radio del círculo, tiene una longitud de $3\sqrt{3}$ cm.




Como el radio es $3\sqrt{3}$ cm, el área de todo el círculo es $27\pi$ cm$^2$. El área de la región sombreada es $\frac{360 - 60}{360}$, ó $\frac{5}{6}$, del área del círculo. Por lo tanto, el área sombreada es $\frac{5}{6}(27\pi) = \frac{45}{2}\pi$ cm$^2$, o aproximadamente 70.7cm$^2$.

**(continúa)**

***EJEMPLO B*** Encuentra el área de la región sombreada.




▶ ***Solución*** El área de la región sombreada es el área del semicírculo menos el área de $\triangle LMN$.

Como $\angle LMN$ está inscrito en un semicírculo, es un ángulo rectángulo. Usando la conjetura de la suma del triángulo, $m\angle N = 45°$. Por lo tanto, $\triangle LMN$ es un triángulo rectángulo isósceles (un triángulo 45°-45°-90°) con un cateto de 4 cm de longitud.

La longitud de la hipotenusa, que es el diámetro del círculo, es $4\sqrt{2}$ cm. Entonces, el radio del círculo es $2\sqrt{2}$ cm, de manera que el área de todo el círculo es $\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2$, ó $8\pi$ cm$^2$. Por lo tanto, el área del semicírculo es $4\pi$ cm$^2$. El área de $\triangle LMN$ es $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4$, u 8 cm$^2$. Así pues, el área de la región sombreada es $(4\pi - 8)$ cm$^2$, o aproximadamente 4.6 cm$^2$.



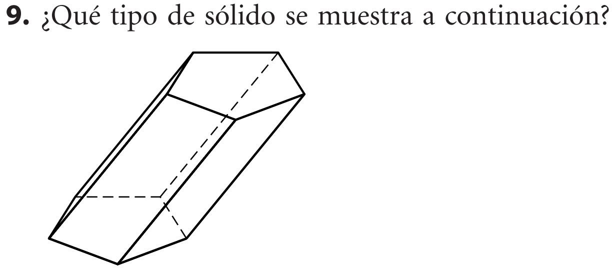

# La geometría de los sólidos

En esta lección

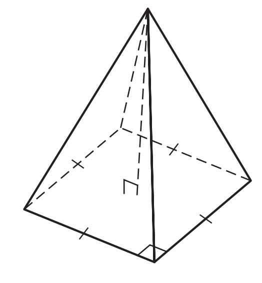
- Conocerás los **poliedros,** que incluyen a los **prismas** y las **pirámides**
- Conocerás los sólidos con superficies curvas, que incluyen a los **hemisferios,** los **cilindros**, los **conos** y las **esferas**

En este capítulo estudiarás figuras sólidas tridimensionales. En la Lección 10.1, se presentan diversos tipos de sólidos tridimensionales y la terminología asociada con ellos. Lee la lección. Después revisa lo que leíste, completando las afirmaciones y respondiendo a las preguntas siguientes.

1. Un poliedro es un sólido formado por ___________________ que delimitan una región única del espacio.
2. Un segmento en el que se intersecan dos caras de un poliedro se llama un(a) ___________________.
3. Un poliedro con seis caras se llama un(a) ___________________.
4. Un tetraedro tiene ___________________ caras.
5. Si cada cara de un poliedro está delimitada por un polígono regular, y cada cara es congruente con las otras caras, y las caras se encuentran con cada vértice exactamente de la misma manera, entonces el poliedro se llama un(a) ___________________.
6. Un(a) ___________________ es un poliedro con dos caras, llamadas bases, que son polígonos paralelos y congruentes.
7. Las caras de un prisma que no son bases se llaman ___________________.
8. ¿Cuál es la diferencia entre un prisma recto y un prisma oblicuo?
9. ¿Qué tipo de sólido se muestra a continuación?



10. ¿Cuántas bases tiene una pirámide?
11. El punto que todas las caras laterales de una pirámide tienen en común es la ___________________ de la pirámide.
12. ¿Cuál es la diferencia entre una altitud de una pirámide y la altura de una pirámide?
13. ¿Qué tipo de sólido se muestra a la derecha?



**(continúa)**

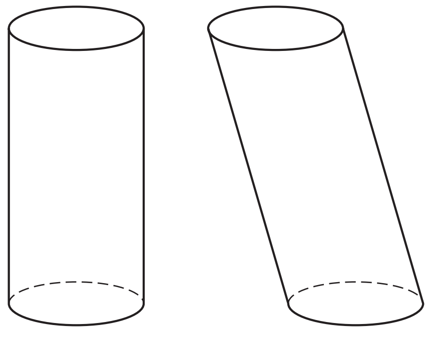
**14.** Nombra tres tipos de sólidos con superficies curvas.

**15.** Un(a) __________________ es el conjunto de todos los puntos en el espacio, a una distancia dada, de un punto dado.

**16.** Un círculo que delimita la base de un hemisferio se llama un(a) _______________.

**17.** Da un ejemplo de un objeto real que tenga la forma de un cilindro. Explica cómo sabes que es un cilindro.

**18.** Di qué cilindro de los siguientes es un cilindro oblicuo y cuál es un cilindro recto. Para cada cilindro, dibuja y rotula el *eje* y la *altitud*.



**19.** La base de un cono es un(a) __________________.

**20.** Si el segmento de recta que conecta el vértice de un cono con el centro de la base es perpendicular a la base, entonces el cono es un(a) _______________.

Después de haber terminado, verifica tus respuestas.

**1.** polígonos
**2.** arista
**3.** hexaedro
**4.** cuatro
**5.** polígono regular
**6.** prisma
**7.** caras laterales
**8.** En un prisma recto todas las caras son rectángulos y son perpendiculares a la base. En un prisma oblicuo no.
**9.** prisma pentagonal (puede ser oblicuo o recto)
**10.** una
**11.** vértice
**12.** La altitud es un segmento desde el vértice de la pirámide al plano de la base que es perpendicular al plano de la base. La altura es la longitud de la altitud.
**13.** pirámide cuadrada
**14.** respuestas posibles: cilindro, cono, esfera, hemisferio
**15.** esfera
**16.** gran círculo
**17.** El ejemplo variará. Motivo: Tiene dos bases paralelas y ambas bases son círculos.
**18.** La figura a la izquierda es un cilindro recto, y la figura a la derecha es un cilindro oblicuo. Mira la página 523 del libro para ver los dibujos rotulados de ambos.
**19.** círculo
**20.** cono recto

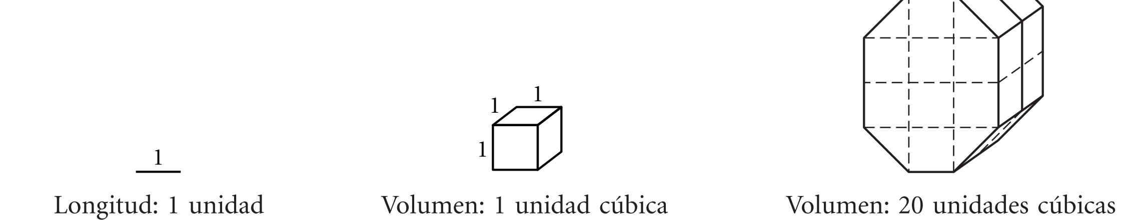



# Volumen de prismas y cilindros

En esta lección

- Descubrirás la fórmula del volumen para **prismas rectangulares rectos**
- Extenderás la fórmula del volumen para **prismas rectos** y **cilindros rectos**
- Extenderás la fórmula del volumen para **prismas oblicuos** y **cilindros oblicuos**

El **volumen** es la medida de la cantidad de espacio contenido en un sólido. Se usan las unidades cúbicas para medir el volumen: pulgadas cúbicas (pulg$^3$), pies cúbicos (pies$^3$), yardas cúbicas (yardas$^3$), centímetros cúbicos (cm$^3$), metros cúbicos (m$^3$), etcétera. El volumen de un objeto es el número de unidades cúbicas que llenan completamente el espacio que está dentro del objeto.




Longitud: 1 unidad — Volumen: 1 unidad cúbica — Volumen: 20 unidades cúbicas

## Investigación: La fórmula del volumen para prismas y cilindros

Lee el Paso 1 de la investigación de tu libro.

Observa que el número de cubos en la capa base es el número de unidades cuadradas en el área de la base, y que el número de capas es la altura del prisma. Así pues, puedes usar el área de la base y la altura para encontrar el volumen de un prisma rectangular recto.

**Conjetura del volumen de un prisma rectangular** Si $B$ es el área de la base de un prisma rectangular recto y $H$ es la altura del sólido, entonces la fórmula del volumen es $V =$ __________________. **C-86a**

Puedes encontrar el volumen de cualquier otro prisma recto o cilindro de la misma manera, multiplicando el área de la base por la altura. Por ejemplo, para encontrar el volumen de este cilindro, encuentra el área de la base circular (el número de cubos en la capa base) y multiplica por la altura.

Puedes extender la conjetura del volumen de un prisma rectangular a todos los prismas rectos y cilindros rectos. Completa la conjetura siguiente.

**Conjetura del volumen de los prismas y cilindros rectos** Si $B$ es el área de la base de un prisma (o cilindro) recto y $H$ es la altura del sólido, entonces la fórmula del volumen es $V =$ __________________. **C-86b**

**(continúa)**

¿Y qué sucede con el volumen de un prisma o cilindro *oblicuo*? En la página 532 de tu libro se muestra cómo puedes modelar un prisma rectangular oblicuo con un montón inclinado de papeles. Después puedes "enderezar" el montón para formar un prisma rectangular recto con el mismo volumen. El prisma recto tiene la misma área de la base y la misma altura que el prisma oblicuo. Así que puedes encontrar el volumen del prisma oblicuo multiplicando el área de su base por su altura. Un argumento similar funciona para otros cilindros y prismas oblicuos.

Ahora puedes extender la conjetura del volumen de los prismas y cilindros rectos a los prismas y cilindros oblicuos.

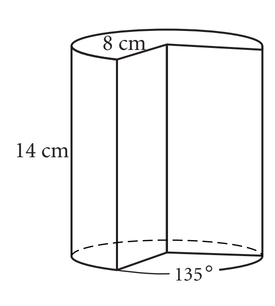
**Conjetura del volumen de los prismas y cilindros oblicuos** El volumen de un prisma (o cilindro) oblicuo es el mismo que el volumen de un prisma (o cilindro) recto que tiene la misma __________________ y la misma __________________. **C-86c**

Ten cuidado al calcular el volumen de un prisma o cilindro oblicuo. Como los bordes laterales no son perpendiculares a las bases, la altura del prisma o cilindro *no* es la longitud de un borde lateral.

Puedes combinar las tres últimas conjeturas en una.

**Conjetura del volumen de los prismas y cilindros** El volumen de un prisma o de un cilindro es la __________________ multiplicada por la __________________. **C-86**

Los Ejemplos A y B de tu libro muestran cómo encontrar los volúmenes de un prisma trapezoidal y de un cilindro oblicuo. Lee ambos ejemplos. Intenta encontrar los volúmenes por tu cuenta, antes de leer las soluciones. Después lee el ejemplo siguiente.




***EJEMPLO*** El sólido a la derecha es un cilindro recto al que le falta una rebanada de 135°. Encuentra el volumen del sólido. Redondea tu respuesta al centímentro más próximo.

▶ ***Solución*** La base es $\frac{225}{360}$, ó $\frac{5}{8}$, de un círculo con un radio de 8 cm. Todo el círculo tiene un área de $64\pi$ cm$^2$, entonces la base tiene un área de $\frac{5}{8}(64\pi)$, o $40\pi$ cm$^2$. Ahora usa la fórmula del volumen.

| | |
|---|---|
| $V = BH$ | La fórmula del volumen. |
| $= 40\pi(14)$ | Sustituye el área de la base y la altura. |
| $= 560\pi$ | Multiplica. |
| $= 1759$ | Usa la tecla $\pi$ de tu calculadora para obtener una respuesta aproximada. |

El volumen es aproximadamente 1759 cm$^3$.




# Volumen de pirámides y conos

En esta lección

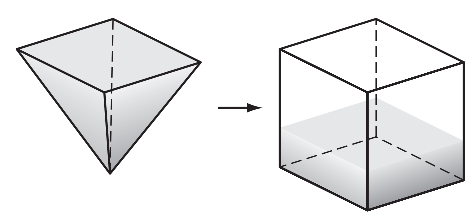
- Descubrirás la fórmula del volumen para **pirámides** y **conos**

Existe una relación simple entre los volúmenes de los prismas y las pirámides con bases congruentes y la misma altura, y entre los cilindros y los conos con bases congruentes y la misma altura.

## Investigación: La fórmula del volumen para pirámides y conos

Si tienes los materiales enumerados al principio de la investigación, sigue los pasos de tu libro antes de continuar. El texto siguiente resume los resultados de la investigación.

Supongamos que comienzas con un prisma y una pirámide con bases congruentes y la misma altura. Si llenas la pirámide con arena o agua y después viertes el contenido en el prisma tres veces, llenarás el prisma exactamente. En otras palabras, el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma.



Obtendrás este mismo resultado sin importar la forma que tengan las bases, siempre y cuando la base de la pirámide sea congruente con la base del prisma y las alturas sean iguales.

Si repites el experimento con un cono y un cilindro con bases congruentes y la misma altura, obtendrás el mismo resultado. Es decir, puedes vertir el contenido del cono en el cilindro exactamente tres veces.

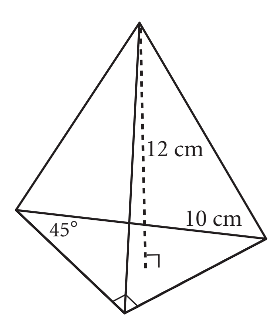
Los resultados pueden resumirse en una conjetura.

**Conjetura del volumen de las pirámides y los conos** Si $B$ es el área de una pirámide o un cono y $H$ es la altura del sólido, entonces la fórmula del volumen es $V = \frac{1}{3}BH$. **C-87**

En el Ejemplo A de tu libro se muestra cómo encontrar el volumen de una pirámide hexagonal regular. En el ejemplo, necesitas usar la conjetura del triángulo 30°-60°-90° para encontrar la apotema de la base. El Ejemplo B tiene que ver con el volumen de un cono. Analiza ambos ejemplos. Después lee el ejemplo siguiente.

**(continúa)**

***EJEMPLO*** Encuentra el volumen de esta pirámide triangular.




***Solución*** La base es un triángulo rectángulo isósceles. Para encontrar el área de la base, necesitas conocer las longitudes de los catetos. Sea $l$ la longitud de un cateto, y usa la conjetura del triángulo rectángulo isósceles.

$l(\sqrt{2}) = 10$ — La longitud de la hipotenusa es la longitud de un cateto multiplicada por $\sqrt{2}$.

$l = \frac{10}{\sqrt{2}}$ — Resuelve para $l$.

La longitud de cada cateto es $\frac{10}{\sqrt{2}}$. Ahora encuentra el área del triángulo.

$A = \frac{1}{2}bh$ — Fórmula del área para triángulos.

$= \frac{1}{2}\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)$ — Sustituye los valores conocidos.

$= 25$ — Multiplica.

Así pues, la base tiene un área de 25 cm$^2$. Ahora encuentra el volumen de la pirámide.

$V = \frac{1}{3}BH$ — Fórmula del volumen para pirámides y conos.

$= \frac{1}{3}(25)(12)$ — Sustituye los valores conocidos.

$= 100$ — Multiplica.

El volumen de la pirámide es 100 cm$^3$.




# Problemas de volumen

En esta lección

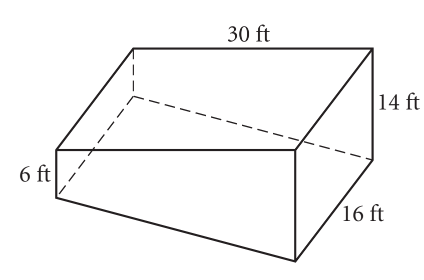
- Usarás las fórmulas del volumen que has aprendido para **resolver problemas**

Has aprendido fórmulas del volumen para prismas, cilindros, pirámides, y conos. En esta lección usarás estas fórmulas para resolver problemas.

En el Ejemplo A de tu libro, se da el volumen de un prisma triangular recto y tú debes encontrar la altura. En el Ejemplo B se da el volumen de un sector de un cilindro recto y tú debes encontrar el radio de la base. Intenta resolver los problemas por tu cuenta antes de leer las soluciones. A continuación se muestran otros ejemplos.

***EJEMPLO A***

Una piscina tiene la forma del prisma que se muestra aquí. ¿Cuántos galones de agua puede contener la piscina? (Un pie cúbico de agua es aproximadamente 7.5 galones.)




***▸ Solución***

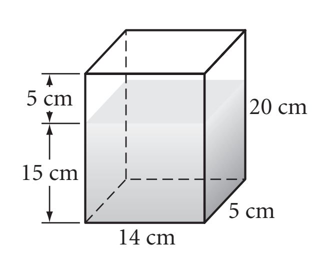
Primero encuentra el volumen de la piscina en pies cúbicos. La piscina tiene la forma de un prisma trapezoidal. El trapecio tiene bases de una longitud 6 pies y 14 pies, y una altura de 30 pies. La altura del prisma es de 16 pies.

| | |
|---|---|
| $V = BH$ | Fórmula del volumen para prismas. |
| $= \frac{1}{2}(30)(6 + 14) \cdot 16$ | Usa la fórmula $\frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$ para el área de un trapecio. |
| $= 4800$ | Resuelve. |

La piscina tiene un volumen de 4800 pies$^3$. Un pie cúbico es aproximadamente 7.5 galones, por lo que la piscina contiene 4800(7.5), ó 36,000 galones de agua.

***EJEMPLO B***

Un recipiente rectangular cerrado de 5 cm por 14 cm por 20 cm está asentado sobre su cara más chica. Está lleno de agua hasta 5 cm debajo del borde superior. ¿A cuántos centímetros a partir del fondo llegará el agua si el recipiente se sitúa sobre su cara más grande?




***▸ Solución***

La cara más chica es un rectángulo de 5 por 14 centímetros. Cuando el prisma descansa sobre la cara más chica, el agua toma la forma de un prisma rectangular con un área de la base de 70 cm$^2$ y una altura de 15 cm. Así que el volumen del agua es de 1050 cm$^3$.

**(continúa)**

Si el recipiente se sitúa sobre su cara más grande, el volumen seguirá siendo 1050 $cm^3$, pero el área de la base y la altura cambiarán. El área de la nueva base será 14(20), ó 280 $cm^2$. Puedes usar la fórmula del volumen para encontrar la altura.

| | |
|---|---|
| $V = BH$ | Fórmula del volumen para prismas. |
| $1050 = 280H$ | Sustituye los valores conocidos. |
| $3.75 = H$ | Resuelve para $H$. |

La altura del agua será de 3.75 cm. Por lo tanto, el nivel del agua será de 3.75 cm a partir del fondo del recipiente.

***EJEMPLO C*** Encuentra el volumen de un prisma rectangular con dimensiones que son el doble de las de otro prisma rectangular que tiene un volumen de 120 $cm^3$.

▶ ***Solución*** Para el prisma con un volumen de 120 $cm^3$, sean $x$ e $y$ las dimensiones de la base rectangular y $z$ la altura. El volumen de este prisma es $xyz$, de manera que $xyz = 120$.

Las dimensiones de la base del otro prisma son $2x$ y $2y$, y la altura es $2z$. Sea $V$ el volumen de este prisma. Entonces

| | |
|---|---|
| $V = BH$ | Fórmula del volumen para prismas. |
| $= (2x)(2y)(2z)$ | Sustituye los valores conocidos. |
| $= 8xyz$ | Multiplica. |
| $= 8(120)$ | Sustituye los valores conocidos. |
| $= 960$ | Multiplica. |

El volumen del prisma más grande es 960 $cm^3$.




# Desplazamiento y densidad

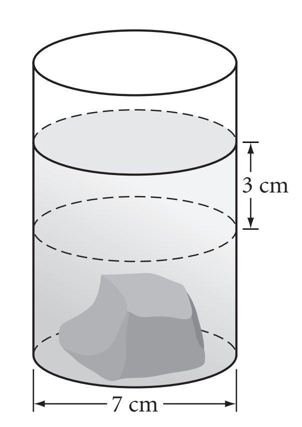
En esta lección

- Aprenderás cómo puede usarse la idea de **desplazamiento** para encontrar el volumen de un objeto
- Aprenderás cómo calcular la **densidad** de un objeto

Para encontrar los volúmenes de sólidos geométricos como los prismas y los conos, puedes usar una fórmula del volumen. Pero, ¿qué sucede si quieres encontrar el volumen de un objeto de forma irregular, como una piedra? Como ilustra el Ejemplo A de tu libro, puedes sumergir el objeto en un recipiente de forma regular, lleno de agua. El volumen del agua **desplazada** será igual al volumen del objeto. Lee el Ejemplo A de tu libro y después lee el ejemplo siguiente.

***EJEMPLO A*** Cuando Tom coloca una piedra en un recipiente cilíndrico que tiene un diámetro de 7 cm, el nivel del agua sube 3 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra, redondeado a la primera décima de un centímetro cúbico?

► ***Solución*** La "rebanada" de agua desplazada es un cilindro con un diámetro de 7 cm y una altura de 3 cm.




Usa la fórmula del volumen para encontrar el volumen del agua desplazada.

$$V = BH$$
$$= \pi(3.5)^2 \cdot 3$$
$$\approx 115.5$$

El volumen de la piedra es aproximadamente 115.5 $\text{cm}^3$, igual que el volumen del agua desplazada.

Una propiedad importante de un material es su densidad. La **densidad** es la masa de materia en un volumen dado. Se calcula dividiendo la masa entre el volumen.

$$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$$

La tabla en la página 551 de tu libro enumera las densidades de diez metales. En el Ejemplo B, se usa la masa de un montón de metal y la información sobre la cantidad de agua que desplaza para identificar el tipo de metal. Lee ese ejemplo atentamente. Después lee el ejemplo siguiente.

**(continúa)**

***EJEMPLO B***

A la química Preethi Bhatt se le da un montón de metal y se le dice que es sodio. Ella encuentra que el metal tiene una masa de 184.3 g. Lo coloca en un líquido no reactivo, en un vaso de precipitación cilíndrico con un diámetro de base de 10 cm. Si el metal es en verdad sodio, ¿a qué nivel debe subir el líquido?

▶ ***Solución***

La tabla en la página 551 de tu libro indica que la densidad del sodio es 0.97 g/cm$^3$. Usa la fórmula de la densidad para encontrar cuál debe ser el volumen del montón de metal, si se trata de sodio.

$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$ Fórmula de la densidad.

$0.97 = \frac{184.3}{\text{volumen}}$ Sustituye la información conocida.

$\text{volumen} \cdot 0.97 = 184.3$ Multiplica ambos lados por *volumen.*

$\text{volumen} = \frac{184.3}{0.97}$ Divide ambos lados entre 0.97.

$\text{volumen} = 190$ Simplifica.

Así pues, si el metal es sodio, debe desplazar 190 cm$^3$ de agua. Usa la fórmula del volumen para encontrar la altura del líquido que debe desplazarse.

$V = BH$ Fórmula del volumen para cilindros.

$190 = (5^2\pi)H$ Sustituye la información conocida. (La base es un círculo con un radio de 5 cm.)

$190 = 25\pi H$ Multiplica.

$2.4 \approx H$ Resuelve para *H.*

El líquido debe subir aproximadamente 2.4 cm.




# Volumen de una esfera

En esta lección

- Descubrirás la fórmula del volumen para una **esfera**

Puedes encontrar el volumen de una esfera comparándola con el volumen de un cilindro. En la investigación verás cómo se hace esto.

## Investigación: La fórmula del volumen de una esfera

Si tienes los materiales enumerados al principio de la investigación, sigue los pasos de tu libro antes de continuar. El texto siguiente resume los resultados de la investigación.

Supongamos que tienes un hemisferio y un cilindro. El radio del cilindro es igual al radio del hemisferio, y la altura del cilindro es dos veces el radio. Observa que el cilindro es el más pequeño que delimitaría una esfera hecha a partir de dos de los hemisferios.



El volumen del cilindro es $\pi r^2(2r)$, ó $2\pi r^3$.

Si llenas el hemisferio con arena o agua y viertes el contenido en el cilindro, éste se llenará $\frac{1}{3}$.

Si vuelves a llenar el hemisferio y viertes el contenido en el cilindro, éste se llenará $\frac{2}{3}$. Así pues, el volumen de la esfera (dos hemisferios) es igual a $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro.

El volumen del cilindro es $2\pi r^3$. Así pues, el volumen de la esfera es $\frac{2}{3}(2\pi r^3)$, ó $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Los resultados pueden resumirse en una conjetura.

**Conjetura del volumen de una esfera** El volumen de una esfera con radio $r$ se expresa por la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. **C-88**

Lee el Ejemplo A de tu libro, en donde se trata de encontrar el porcentaje de yeso desechado cuando se esculpe la mayor esfera posible a partir de un cubo. La solución implica cuatro pasos:

**Paso 1** Encontrar el volumen de la esfera.

**Paso 2** Encontrar el volumen del cubo.

**Paso 3** Restar el volumen de la esfera del volumen del cubo, para encontrar el volumen del yeso desechado.

**Paso 4** Divide el volumen desechado entre el volumen del cubo original y convierte la respuesta en un porcentaje para encontrar el porcentaje desechado.

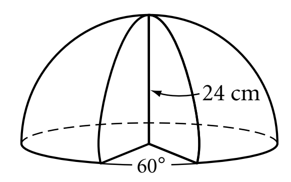
Lee el Ejemplo B de tu libro. Resuelve el problema por tu cuenta y luego verifica tu trabajo leyendo la solución dada.

**(continúa)**

## Lección 10.6 • Volumen de una esfera (continuación)

Los siguientes dos ejemplos te dan más práctica trabajando con el volumen de una esfera.

***EJEMPLO A*** Encuentra el volumen de este sólido.




***Solución*** El sólido es un hemisferio al que se le ha quitado un sector de 60°. Primero, encuentra el volumen de todo el hemisferio. Como la fórmula para el volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, la fórmula para el volumen de un hemisferio es $V = \frac{2}{3}\pi r^3$.

$V = \frac{2}{3}\pi r^3$ Fórmula del volumen para un hemisferio.

$= \frac{2}{3}\pi(24)^3$ El radio mide 24 cm.

$= \frac{2}{3}\,9216\pi$ Simplifica.

El volumen de todo el hemisferio es $9216\pi$ cm³. Se le ha quitado un sector de 60°, de manera que la fracción del hemisferio que resta es $\frac{300}{360}$, ó $\frac{5}{6}$. Así pues, el volumen del sólido es $\frac{5}{6}(9216\pi) = 7680\pi$ cm³ o aproximadamente 24.127 cm³ .

***EJEMPLO B*** Se sumerge una canica bajo el agua en un prisma rectangular cuya base es de 2 cm por 2 cm. El agua dentro del prisma sube 0.9 cm al sumergir la canica. ¿Qué diámetro tiene la canica?

***Solución*** Primero halla el volumen del agua desplazada por la canica.

$V = BH$ Fórmula del volumen de un prisma.

$= (2)(2)(0.9)$ Sustituye la información conocida.

$= 3.6$ Simplifica.

Entonces, el volumen del agua desplazada y por lo tanto de la canica es 3.6 cm³. Después usa el volumen de la canica para hallar su radio. Sustituye $V$ por 3.6 en la fórmula del volumen de una esfera y resuelve para $r$.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ Fórmula del volumen de una esfera.

$3.6 = \frac{4}{3}\pi r^3$ Sustituye la información conocida.

$\frac{\frac{3}{4}(3.6)}{\pi} = r^3$ Multiplica ambos lados por $\frac{3}{4}$ y divide entre $\pi$.

$0.86 \approx r^3$ Simplifica.

$r \approx \sqrt[3]{0.86} \approx 0.95$ Saca la raíz cúbica de ambos lados.

El radio de la canica es de aproximadamente 0.95 cm, entonces el diámetro tiene aproximadamente 1.9 cm.




# El área de la superficie de una esfera

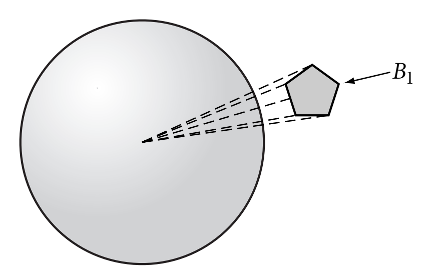
En esta lección

- Descubrirás la fórmula del **área de la superficie de una esfera**

Puedes usar la fórmula del volumen de una esfera, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, para encontrar la fórmula del área de la superficie de una esfera.

## Investigación: La fórmula del área de la superficie de una esfera

Imagina la superficie de una esfera dividida en formas diminutas que son casi planas. El área de la superficie de la esfera es igual a la suma de las áreas de estos "casi polígonos". Si imaginas unos radios que conectan cada uno de los vértices de los "casi polígonos" con el centro de la esfera, estarás dividiendo mentalmente el volumen de la esfera en muchas "casi pirámides". Cada uno de los "casi polígonos" es una base para una de las pirámides, y el radio, *r*, de la esfera es la altura de la pirámide. El volumen, *V*, de la esfera es la suma de los volúmenes de todas las pirámides.




**Paso 1** Imagina que la superficie de una esfera se divide en 1000 "casi polígonos" con áreas $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_{1000}$. El área de la superficie, *S*, de la esfera es la suma de las áreas de estos "casi polígonos":

$$S = B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_{1000}$$

**Paso 2** La pirámide con un área de la base $B_1$ tiene un volumen de $\frac{1}{3}(B_1)r$, la pirámide con un área de la base $B_2$ tiene un volumen de $\frac{1}{3}(B_2)r$, y así sucesivamente. El volumen de la esfera, *V*, es la suma de estos volúmenes:

$$V = \frac{1}{3}(B_1)r + \frac{1}{3}(B_2)r + \frac{1}{3}(B_3)r + \cdots + \frac{1}{3}(B_{1000})r$$

Factoriza $\frac{1}{3}r$ de cada término del lado derecho de la ecuación:

$$V = \frac{1}{3}r(B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_{1000})$$

**Paso 3** Como $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, puedes sustituir *V* por $\frac{4}{3}\pi r^3$:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}r(B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_{1000})$$

Ahora sustituye $B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_{1000}$ por *S*:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}rS$$

**(continúa)**

**Paso 4** Resuelve la última ecuación para el área de la superficie, $S$.

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}rS$ La ecuación del Paso 3.

$4\pi r^3 = rS$ Multiplica ambos lados por 3.

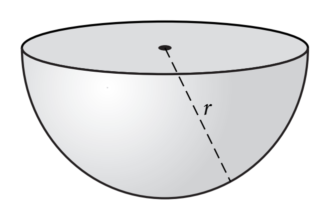
$4\pi r^2 = S$ Divide ambos lados entre $r$.

Ahora tienes una fórmula para encontrar el área de la superficie de una esfera, en términos del radio. Puedes establecer el resultado en una conjetura.

**Conjetura del área de la superficie de una esfera** El área de la superficie, $S$, de una esfera con radio $r$ se expresa por la fórmula $S = 4\pi r^2$. **C-89**

El ejemplo en tu libro muestra cómo encontrar el área de la superficie de una esfera si conoces su volumen. Trata de encontrar el área de la superficie por tu cuenta, antes de leer la solución. Después resuelve el problema en el siguiente ejemplo.

***EJEMPLO*** La base de este hemisferio tiene una circunferencia de $32\pi$ cm. Encuentra el área de la superficie del hemisferio (incluyendo la base).




▶ ***Solución*** Como la base del hemisferio tiene una circunferencia de $32\pi$ cm, el radio es de 16 cm.

El área de la base del hemisferio es $\pi(16)^2$, ó $256\pi$ cm$^2$.

El área de la superficie curva es la mitad del área de la superficie de una esfera con un radio de 16 cm.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 4\pi(16)^2$$
$$= 512\pi$$

Por lo tanto, el área total de la superficie es $256\pi + 512\pi = 768\pi$ cm$^2$, o aproximadamente 2413 cm$^2$.

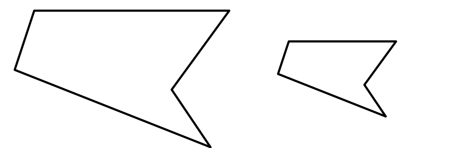



# Polígonos semejantes

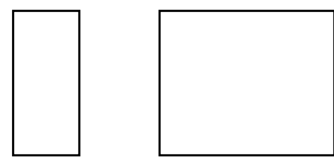
En esta lección

- Aprenderás lo que significa que dos figuras sean **semejantes**
- Usarás la definición de semejanza para **encontrar las medidas faltantes** en polígonos semejantes
- Explorarás las **dilataciones** de figuras sobre un plano de coordenadas

Tú ya sabes que las figuras que tienen el mismo tamaño y la misma forma son *figuras congruentes*. Las figuras que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño, son **figuras semejantes.** Puedes considerar las figuras semejantes como agrandamientos o reducciones de ellas mismas sin distorsiones. Los pentágonos siguientes son semejantes. Los rectángulos *no* son semejantes, porque no podrías agrandar o reducir uno de estos rectángulos para que se ajuste exactamente al otro.



Estos pentágonos son semejantes.



Estos rectángulos *no* son semejantes.

En la investigación explorarás lo que hace que los polígonos sean semejantes.

## Investigación 1: ¿Por qué son semejantes los polígonos?

Los hexágonos *ABCDEF* y *PQRSTU* de tu libro son semejantes. Usa *patty paper* para comparar los ángulos correspondientes. Debes encontrar que los ángulos correspondientes son congruentes.

Ahora mide cuidadosamente los lados correspondientes y encuentra la razón entre cada longitud lateral del *ABCDEF* y la longitud del lado correspondiente del *PQRSTU*. Debes encontrar que cada razón es aproximadamente igual a $\frac{5}{9}$. Por lo tanto, los lados correspondientes son proporcionales.

Finalmente, calcula y compara estas razones de las longitudes laterales dentro de cada polígono: $\frac{AB}{BC}$ con $\frac{PQ}{QR}$ y $\frac{EF}{CD}$ con $\frac{TU}{RS}$. Deberías hallar que $\frac{AB}{BC} \approx \frac{PQ}{QR}$ y $\frac{EF}{CD} \approx \frac{TU}{RS}$. (Las razones tal vez no sean exactamente iguales porque las medidas no son exactas.) Entonces la razón entre dos lados del polígono *ABCDEF* es igual a la razón entre los lados correspondientes de *PQRSTU*.

Las relaciones que descubriste en la investigación ilustran la definición matemática de polígonos semejantes.

Dos polígonos son **semejantes** si y solamente si los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales.

La proposición *CORN* ~ *PEAS* dice que el cuadrilátero *CORN* es semejante al cuadrilátero *PEAS*. El orden de las letras te dice cuales lados y cuales ángulos corresponden.

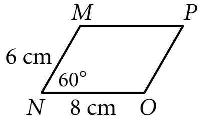
Observa los cuadriláteros *SQUE* y *RCTL* en la página 583 de tu libro. Estas figuras tienen ángulos correspondientes congruentes, pero *no* son semejantes porque los lados correspondientes *no* son proporcionales.

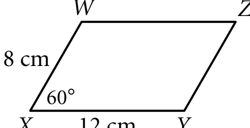
**(continúa)**

Ahora mira los cuadriláteros *SQUE* y *RHOM*. Estas figuras tienen lados correspondientes que son proporcionales, pero *no* son semejantes porque los ángulos correspondientes *no* son congruentes.

Estos ejemplos ilustran que para que dos figuras sean semejantes, deben cumplirse ambas condiciones: lados proporcionales y ángulos congruentes. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO*** Determina si el paralelogramo *MNOP* es semejante al paralelogramo *WXYZ*.




▶ ***Solución*** $m\angle N = m\angle X$. Usando las propiedades de los ángulos de paralelogramos, $m\angle M = m\angle W = 120°$, $m\angle P = m\angle Z = 60°$, y $m\angle O = m\angle Y = 120°$. Así pues, los ángulos correspondientes son congruentes.

Sin embargo, como $\frac{MN}{WX} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ y $\frac{NO}{XY} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$, los lados correspondientes no son proporcionales. Por lo tanto, los paralelogramos no son semejantes.

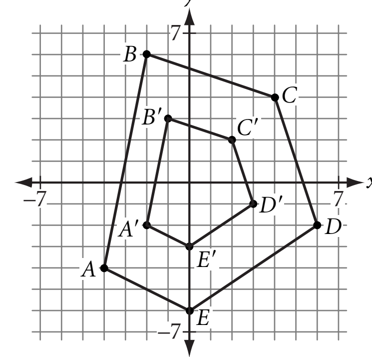
Si sabes que dos polígonos son semejantes, puedes usar la definición de polígonos semejantes para encontrar las medidas faltantes. El ejemplo de tu libro muestra cómo hacerlo. Lee este ejemplo atentamente y asegúrate de que lo comprendes.

En el Capítulo 7, viste que las transformaciones rígidas—traslaciones, rotaciones y reflexiones—preservan el tamaño y la forma de una figura, dando como resultado una imagen que es congruente con el original. En la siguiente investigación verás una transformación no rígida llamada **dilatación.**

## Investigación 2: Dilataciones sobre el plano de coordenadas

Para *dilatar* una figura en el plano de coordenadas en relación al origen, multiplicas las coordenadas de todos sus vértices por el mismo número, llamado un **factor de escala.**

El pentágono *ABCDE* de tu libro tiene vértices con las coordenadas $A(-4, -4)$, $B(-2, 6)$, $C(4, 4)$, $D(6, -2)$, $E(0, -6)$. Si multiplicas cada coordenada por $\frac{1}{2}$, obtienes $A'(-2, -2)$, $B'(-1, 3)$, $C'(2, 2)$, $D'(3, -1)$, $E'(0, -3)$. La figura a la derecha muestra el pentágono original y la imagen.




Si comparas los lados correspondientes y los ángulos, encontrarás que los ángulos correspondientes son congruentes y que cada lado de la imagen es la mitad de la longitud de su lado original correspondiente. Así pues, los pentágonos son semejantes.

Escoge uno de los otros factores de escala enumerados en tu libro—$\frac{3}{4}$, 2 ó 3—y multiplica cada coordenada de *ABCDE* por el factor que escojas. Grafica la imagen sobre los mismos ejes que el pentágono original. Compara las medidas de los ángulos correspondientes y las longitudes de los lados. ¿Son semejantes los dos pentágonos? Establece tus descubrimientos en una conjetura.

**Conjetura de la semejanza de una dilatación** Si un polígono es la imagen dilatada de otro polígono, entonces _______________. **C-90**

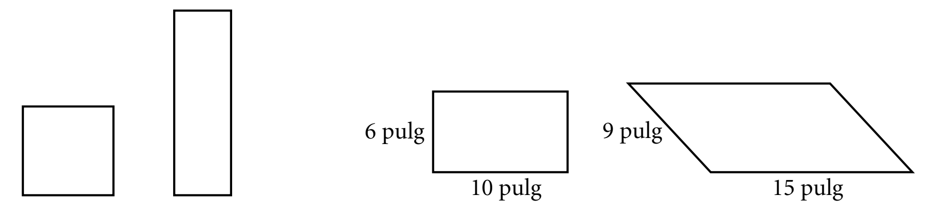



# Triángulos semejantes

En esta lección

- Aprenderás unos **medios rápidos** para determinar si dos triángulos son semejantes

En la Lección 11.1, viste que para determinar si dos cuadriláteros son congruentes, debes verificar *tanto* que sus lados correspondientes sean proporcionales *como* que sus ángulos correspondientes sean congruentes.




Los ángulos son congruentes, pero los cuadriláteros *no* son semejantes.

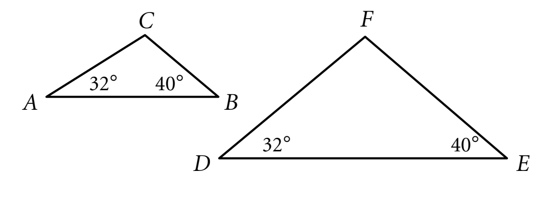
Los lados son proporcionales, pero los cuadriláteros *no* son semejantes.

Los triángulos son diferentes. En el Capítulo 4, descubriste que no tienes que verificar cada par de lados y ángulos para saber si dos triángulos son congruentes. Encontraste que SSS, SAS, ASA y SAA son medios rápidos para verificar la congruencia. En esta lección encontrarás que también hay medios rápidos para verificar la semejanza.

En la página 589 de tu libro, se muestran dos triángulos en los que sólo un par de ángulos es congruente. Los triángulos claramente no son semejantes. Así pues, saber únicamente que un par de ángulos es congruente no es suficiente para concluir que dos triángulos son semejantes. ¿Qué sucede si dos pares de ángulos son congruentes?

### Investigación 1: ¿Es AA un medio rápido para determinar la semejanza?

En los triángulos mostrados a la derecha, $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$. ¿Qué debe ser cierto respecto a $\angle C$ y $\angle F$? ¿Por qué?




Mide los lados y compara las razones de las longitudes de los lados correspondientes. ¿$\frac{AB}{DE} \approx \frac{AC}{DF} \approx \frac{BC}{EF}$?

Dibuja tu propio triángulo *ABC*. Usa un compás y una regla no graduada para construir el triángulo *DEF*, con $\angle A \cong \angle D$ y $\angle B \cong \angle E$. ¿Tus triángulos son semejantes? Explica. Tus descubrimientos deben respaldar esta conjetura.

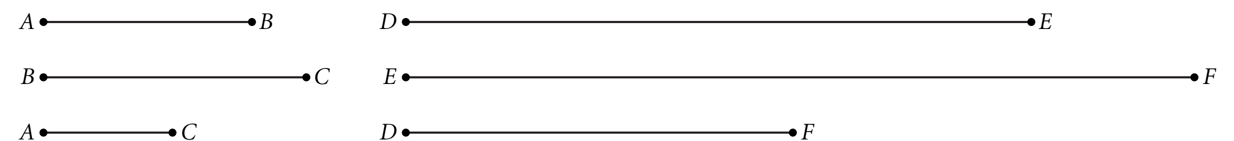
**Conjetura de semejanza AA** Si dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos ángulos de otro triángulo, entonces los triángulos son semejantes. **C-91**

Ahora considera los medios rápidos para determinar la semejanza que compara sólo los lados correspondientes. La ilustración en la página 590 de tu libro muestra que no puedes concluir que dos triángulos son semejantes basándote en el hecho que dos pares de lados correspondientes son proporcionales. ¿Qué sucede si todos los tres pares de lados correspondientes son proporcionales?

(continúa)

## Investigación 2: ¿Es SSS un medio rápido para determinar la semejanza?

Usa los segmentos a la izquierda para construir $\triangle ABC$. Cada segmento a la derecha es tres veces la longitud del segmento correspondiente a la izquierda. Usa los segmentos a la derecha para construir $\triangle DEF$.




Las longitudes de los lados de $\triangle DEF$ son proporcionales a las longitudes de los lados de $\triangle ABC$. Mide los ángulos y ve cómo se comparan. ¿Los triángulos son semejantes?

Construye otro par de triángulos de manera que las longitudes laterales de un triángulo sean múltiplos de las longitudes laterales del otro. Compara los ángulos correspondientes de tus triángulos.

Ahora puedes completar esta conjetura.

**Conjetura de semejanza SSS** Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son ___________________. **C-92**

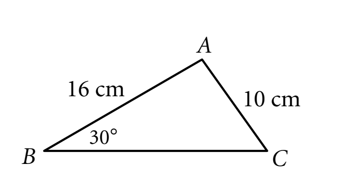
Si AA es un medio rápido para determinar la semejanza, entonces también lo son ASA, SAA y AAA, porque cada uno de estos medios rápidos contiene dos ángulos. Queda por verificar si SAS y SSA son medios rápidos también. En la siguiente investigación examinarás SAS.

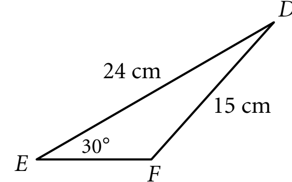
## Investigación 3: ¿Es SAS un medio rápido para determinar la semejanza?

Trata de construir dos triángulos diferentes que *no* sean semejantes, pero que tengan dos pares de lados proporcionales y el par de ángulos incluidos iguales en medida. ¿Puedes hacerlo? Tus descubrimientos deben respaldar esta conjetura.

**Conjetura de semejanza SAS** Si dos lados de un triángulo son proporcionales a dos lados de otro triángulo y los ángulos incluidos son congruentes, entonces los triángulos son semejantes. **C-93**

En los triángulos siguientes, dos pares de lados correspondientes son proporcionales y un par de ángulos no incluidos es congruente. Sin embargo, los triángulos claramente no son semejantes. Esto muestra que SSA *no* es un medio rápido para determinar la semejanza.




$$\frac{AB}{DE} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AC}{DF} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ y $\angle B \cong \angle E$, pero los triángulos no son semejantes.




# Medición indirecta con triángulos semejantes

En esta lección

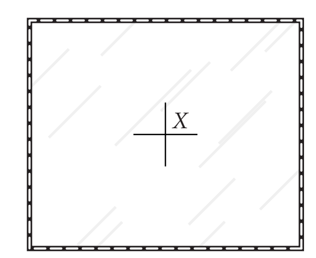
- Aprenderás a usar los triángulos semejantes para medir objetos altos y distancias largas de **manera indirecta**

Supongamos que deseas encontrar la altura de un objeto alto como un mástil. Sería difícil medirlo directamente. ¡Necesitarías una escalera y una cinta métrica muy largas! En esta lección aprenderás cómo usar los triángulos semejantes para encontrar las alturas de objetos altos de manera indirecta.

## Investigación: Espejito, espejito

Necesitarás otra persona que te ayude con esta investigación. También necesitarás un pequeño espejo, un metro y cinta adhesiva protectora.

Marca una cruceta en tu espejo con cinta adhesiva o con tinta soluble. Rotula el punto de intersección como $X$.



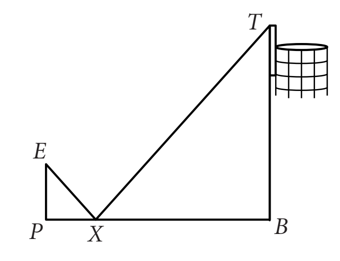

Escoge un objeto alto, tal como un mástil, un árbol alto, una canasta de baloncesto o un edificio alto.

Coloca el espejo, boca arriba, sobre el suelo, a varias yardas del objeto que deseas medir.

Echa unos pasos hacia atrás, de manera que te mantengas alineado con el espejo y el objeto, hasta que veas la parte más alta del objeto reflejado en el punto $X$ del espejo.

Haz que otra persona mida y anote las distancias entre tú y $X$, y entre $X$ y la base del objeto. Asimismo, haz que la persona mida y anote tu altura al nivel de los ojos.

Dibuja un diagrama de tu situación, como el siguiente. Rotula la parte más alta del objeto como $T$, la base del objeto como $B$, el punto donde estabas parado como $P$, y el nivel de tus ojos como $E$. Rotula $\overline{PX}$, $\overline{BX}$ y $\overline{EP}$ con las medidas que tu ayudante encontró.

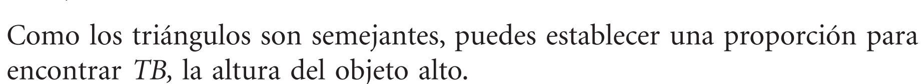



Considera $\overline{TX}$ como la trayectoria de un rayo de luz que rebotó hacia tu ojo, a lo largo de $\overline{XE}$. Como el ángulo de entrada debe ser congruente con el ángulo de salida, $\angle EXP \cong \angle TXB$. Asimismo, como $\overline{EP}$ y $\overline{TB}$ son perpendiculares al suelo, $\angle P \cong \angle B$. Según la conjetura de semejanza AA, $\triangle EPX \sim \triangle TBX$.

Como los triángulos son semejantes, puedes establecer una proporción para encontrar $TB$, la altura del objeto alto.

$$\frac{EP}{PX} = \frac{TB}{BX}$$

Encuentra la altura de tu objeto. Después escribe un párrafo que resuma tu trabajo. Analiza las posibles causas de errores.

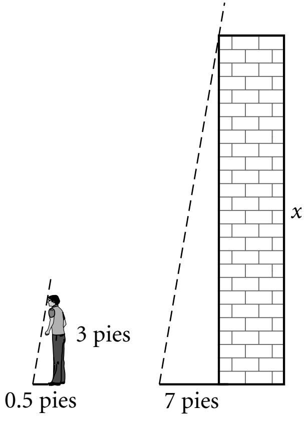


**(continúa)**

El ejemplo de tu libro ilustra un método de medición indirecta que tiene que ver con sombras. Lee el ejemplo y asegúrate de que puedes explicar por qué los dos triángulos son semejantes. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO*** Un edificio de ladrillos proyecta una sombra de 7 pies de largo. Al mismo tiempo, un niño de 3 pies de alto proyecta una sombra de 6 pulgadas de largo. ¿Qué altura tiene el edificio?

▶ ***Solución*** El dibujo siguiente muestra los triángulos semejantes que se forman. Encuentra $x$, estableciendo y resolviendo una proporción.




$$\frac{\text{Altura del niño}}{\text{Longitud de la sombra del niño}} = \frac{\text{Altura del edificio}}{\text{Longitud de la sombra del edificio}}$$

$$\frac{3}{0.5} = \frac{x}{7}$$

$$6 = \frac{x}{7}$$

$$7 \cdot 6 = x$$

$$42 = x$$

El edificio tiene 42 pies de altura.




# Partes correspondientes de triángulos semejantes

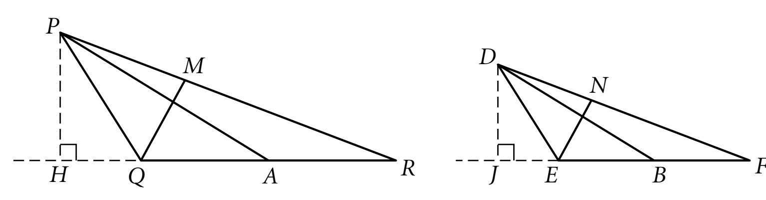
En esta lección

- Investigarás la relación entre las **altitudes correspondientes,** las **medianas correspondientes,** y las **bisectrices de ángulos correspondientes** de los triángulos semejantes
- **Probarás** que las longitudes de las medianas correspondientes de los triángulos semejantes son proporcionales a las longitudes de los lados correspondientes
- Descubrirás una **relación proporcional que tiene que ver con las bisectrices de ángulos**

Si dos triángulos son semejantes, entonces las longitudes de sus lados son proporcionales. En la siguiente investigación verás si existe una relación entre las longitudes de las altitudes correspondientes, las medianas correspondientes o las bisectrices de ángulos correspondientes.

## Investigación 1: Partes correspondientes

$\triangle PQR \sim \triangle DEF$. El factor de escala de $\triangle PQR$ a $\triangle DEF$ es $\frac{3}{4}$.




$\overline{PH}$ y $\overline{DJ}$ son altitudes correspondientes. ¿Cómo se comparan las longitudes de estas altitudes? ¿Cómo se relaciona la comparación con el factor de escala?

$\overline{PA}$ y $\overline{DB}$ son medianas correspondientes. ¿Cómo se comparan las longitudes de estas medianas?

$\overline{QM}$ y $\overline{EN}$ son bisectrices de ángulos correspondientes. ¿Cómo se comparan las longitudes de estas bisectrices de ángulos?

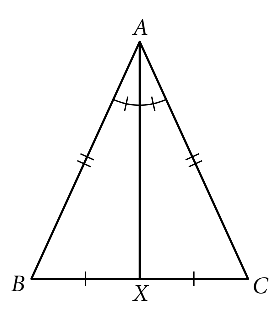
Ahora dibuja tu propio triángulo y después construye un triángulo semejante de un tamaño diferente. Señala qué factor de escala usaste. Sigue los Pasos 2–4 de tu libro para construir y comparar las longitudes, las altitudes, las medianas y las bisectrices de ángulos correspondientes.

Resume tus descubrimientos en esta investigación, completando la conjetura siguiente.

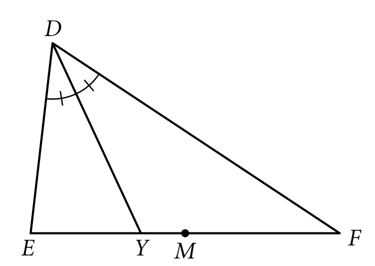
**Conjetura de partes proporcionales** Si dos triángulos son semejantes, entonces las longitudes de __________________, __________________ y __________________ correspondientes son __________________ a las longitudes de los lados correspondientes. **C-94**

**(continúa)**

Si un triángulo es isósceles, la bisectriz de ángulo del vértice divide los lados opuestos en partes iguales. (Es decir, la bisectriz de ángulo también es una mediana.) Sin embargo, como muestra el triángulo a la derecha, esto no es cierto para todos los triángulos.




$\overline{AX}$ es una bisectriz de ángulo.
El punto $X$ es el punto medio de $\overline{BC}$.




$\overline{DY}$ es una bisectriz de ángulo.
El punto $M$ es el punto medio de $\overline{EF}$.

La bisectriz de ángulo, sin embargo, sí divide el lado opuesto de una manera particular.

## Investigación 2: Razones de lados opuestos

Sigue los Pasos 1–5 de tu libro.

Debes encontrar que ambas razones son iguales a $\frac{1}{2}$.

Repite los Pasos 1–5 de tu libro con $AC = 6$ unidades y $AB = 18$ unidades. Esta vez debes encontrar que $\frac{CA}{BA}$ y $\frac{CD}{BD}$ son ambas iguales a $\frac{1}{3}$.

Puedes establecer tus descubrimientos en una conjetura.

**Conjetura de la bisectriz de ángulo y el lado opuesto** Una bisectriz de un ángulo en un triángulo divide el lado opuesto en dos segmentos cuyas longitudes guardan la misma proporción que las longitudes de los dos lados que forman el ángulo. **C-95**

El ejemplo de tu libro prueba que en triángulos semejantes, las longitudes de las medianas correspondientes son proporcionales a las longitudes de los lados correspondientes. Lee el ejemplo siguiendo cada paso de la prueba.




# Proporciones con área

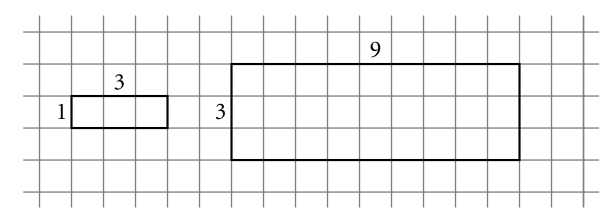
En esta lección

- Descubrirás la **relación entre las áreas** de figuras semejantes

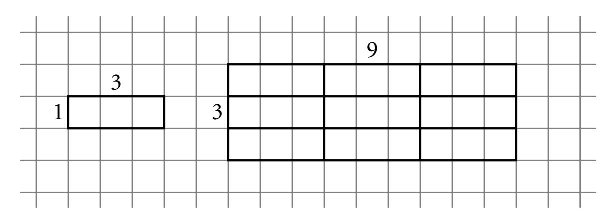
Si se multiplican las dimensiones de una figura bidimensional por un factor de escala, ¿cómo se afecta su área? En esta lección explorarás esta pregunta.

## Investigación 1: Razones de áreas

El rectángulo a la derecha se creó al multiplicar por 3 las longitudes laterales del rectángulo a la izquierda.




El área del rectángulo pequeño es de 3 unidades cuadradas. El área del rectángulo grande es de 27 unidades cuadradas. La razón entre las longitudes laterales del rectángulo grande y las longitudes laterales del rectángulo pequeño es $\frac{3}{1}$, y la razón de las áreas es $\frac{9}{1}$. Observa que dentro del rectángulo grande caben nueve copias del rectángulo pequeño.




Ahora dibuja tu propio rectángulo en papel cuadriculado. Después crea un rectángulo más grande o más pequeño, al multiplicar los lados por un factor de escala que no sea 3. ¿Cuál es la razón entre las longitudes laterales del rectángulo grande y las longitudes laterales del rectángulo pequeño? ¿Cuál es la razón entre las áreas? ¿Cómo se comparan las dos razones?

Dibuja un triángulo en papel cuadriculado (tu trabajo se facilitará si dibujas un triángulo rectángulo). Dibuja un triángulo semejante multiplicando las longitudes laterales por un factor de escala. Encuentra la razón entre las longitudes laterales y la razón entre las áreas. ¿Cómo se comparan las razones?

¿Crees que tus descubrimientos serían los mismos con cualquier par de polígonos?

¿Tus descubrimientos serían los mismos con un círculo? Considera un círculo con un radio de 5 cm y otro círculo con un radio de 20 cm. ¿Cómo se compara la razón entre los radios con la razón entre las áreas?

**(continúa)**

La siguiente conjetura resume la relación existente entre las áreas de figuras semejantes.

**Conjetura de áreas proporcionales** Si las longitudes de los lados correspondientes de dos polígonos semejantes, o los radios de dos círculos, se comparan en la razón $\frac{m}{n}$, entonces sus áreas se comparan en la razón $\frac{m^2}{n^2}$. **C-96**

El razonamiento de la conjetura de áreas proporcionales es que el área es una medida bidimensional. Al calcular el área se multiplican dos medidas lineares, como ser la base y la altura. Entonces, si un rectángulo tiene una base $b$ y una altura $h$, el área es $bh$. Si la base y la altura se multiplican por 2, entonces el área del nuevo rectángulo es $2b \cdot 2h$, ó $4bh$. Es decir cuatro veces el área del rectángulo original. De la misma manera, si la base y la altura se multiplican por 3, entonces el área del nuevo rectángulo es $3b \cdot 3h$, ó $9bh$. Es decir nueve veces el área del rectángulo original.

## Investigación 2: Razones de áreas superficiales

En esta investigación explorarás si la conjetura de áreas proporcionales es cierta para áreas superficiales de figuras semejantes. Para esta investigación necesitarás cubos desmontables y papel isométrico.

Sigue los Pasos 1–3 de tu libro.

Deberías hallar que el área superficial para la figura del Paso 1 es de 22 unidades cuadradas, mientras que el área superficial para un prisma semejante agrandado con un factor de escala de 2 es de 88 unidades cuadradas. Por lo tanto, las longitudes que corresponden a las aristas tienen una razón de 2 a 1, mientras que la razón de las áreas superficiales es de 88 a 22, ó 4 a 1.

Sigue el Paso 4 de tu libro. Asegúrate de incluir el área de cada cara. Incluyendo la cara sobre la que está asentada la figura.

Deberías hallar que el área superficial de la figura es de 28 unidades cuadradas.

Sigue los Pasos 5 y 6 de tu libro.

Si tus respuestas para los Pasos 5 y 6 son correctas, puedes concluir correctamente que la conjetura de áreas proporcionales también se puede aplicar a áreas superficiales.

El ejemplo de tu libro muestra el modo de usar la conjetura de áreas proporcionales para resolver problemas en la vida real. Resuelve el problema por tu cuenta antes de leer la solución.




# Proporciones con volumen

En esta lección

- Descubrirás la **relación** entre **los volúmenes** de sólidos semejantes.

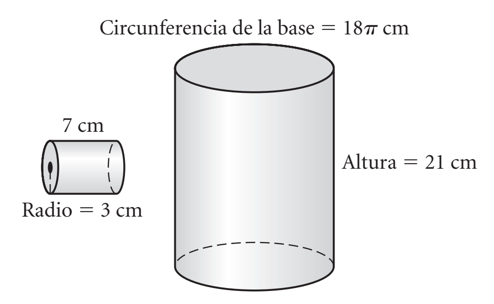
Al multiplicar cada dimensión de un sólido tridimensional por el mismo factor de escala, ¿cómo afecta su volumen? En esta lección explorarás esta pregunta.

Supón que vas a crear una estatua de 2 pies de altura. Primero creas una versión más pequeña de la estatua que tiene 4 pulgadas de altura y pesa 8 onzas. ¿Cuánta arcilla deberías comprar para la estatua más grande? ¿Te parece que necesitarías 108 libras de arcilla? Cuando termines esta lección entenderás por qué.

Los **sólidos semejantes** son sólidos que tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Todos los cubos son semejantes, pero no todos los prismas son semejantes. Todas las esferas son semejantes, pero no todos los cilindros son semejantes. Dos poliedros son semejantes si todas sus caras correspondientes son semejantes y las longitudes de sus bordes correspondientes son proporcionales. Dos cilindros o conos rectos son semejantes si sus radios y alturas son proporcionales.

Los Ejemplos A y B de tu libro implican determinar si dos sólidos dados son semejantes. Intenta contestar los problemas por tu cuenta, antes de leer las soluciones. Aquí hay otro ejemplo.

***EJEMPLO*** ¿Son semejantes estos dos cilindros?




▶ ***Solución*** Halla el radio del cilindro más grande.

$$C = 2\pi r$$

$$18\pi = 2\pi r$$

$$r = 9$$

El radio es 9 cm.

Al comparar las longitudes de las partes correspondientes vemos que:

La razón de los radios es $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

La razón de las alturas es $\frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.

Los radios y las alturas son proporcionales, entonces los cilindros rectos son semejantes.

**(continúa)**

## Investigación: Razones de volúmenes

En esta investigación explorarás cómo la razón entre las longitudes de los bordes de sólidos semejantes se compara con la razón entre los volúmenes. Necesitarás unos cubos desmontables y papel isométrico.

Sigue los Pasos 1 y 2 de tu libro. En el Paso 2, asegúrate de que multiplicas todas las tres dimensiones—longitud, ancho y altura—por 2.

¿Cuál es la razón de las longitudes laterales (de las más grandes a las más pequeñas) entre las dos "serpientes"? ¿Cuál es la razón entre los volúmenes? ¿Cómo se comparan las razones?

Sigue los Pasos 4–6 de tu libro. ¿Cómo cambiaría el volumen si multiplicaras cada dimensión por 5? ¿Por $\frac{1}{2}$?

Tus descubrimientos pueden establecerse en una conjetura.

**Conjetura de los volúmenes proporcionales** Si las longitudes de los bordes (o radios o alturas) correspondientes de dos sólidos semejantes se comparan en la razón $\frac{m}{n}$, entonces sus volúmenes se comparan en la razón $\frac{m^3}{n^3}$. **C-97**

El ejemplo de tu libro muestra la manera de aplicar tanto la conjetura de áreas proporcionales como la conjetura de volúmenes proporcionales. Completa el ejemplo por tu cuenta para entender cómo se usa cada conjetura. Luego lee el siguiente ejemplo. Resuelve el problema por tu cuenta antes de leer la solución.

***EJEMPLO*** Una "lata cuadrada" es un cilindro recto que tiene la altura igual a su diámetro. Una lata cuadrada tiene 5 cm de altura y la otra 12 cm de altura. ¿Aproximadamente cuántas latas pequeñas llenas de agua se necesitan para llenar la lata más grande?

▶ ***Solución*** La razón entre el radio de la lata más grande y el radio de la lata más pequeña es $\frac{6}{2.5} = \frac{12}{5}$, que equivale a la razón de las alturas. Entonces, las dos latas cuadradas son semejantes.

La cantidad de agua necesaria para llenar cada lata está determinada por el volumen de la lata, entonces halla la razón de los volúmenes. La razón de las alturas es $\frac{12}{5}$. Por lo tanto, la razón de los volúmenes es $\frac{12^3}{5^3}$, ó $\frac{1728}{125}$.

$\frac{1728}{125} \approx 13.8$, entonces se necesitan casi 14 latas pequeñas de agua para llenar la más grande.




# Segmentos proporcionales entre rectas paralelas

En esta lección

- Explorarás la relación entre las longitudes de segmentos formados cuando una o más rectas paralelas a un lado de un triángulo intersecan a los otros dos lados
- Aprenderás cómo puedes usar la relación que descubriste para dividir un segmento dado en cualquier número de partes iguales

La parte de arriba de la página 623 de tu libro muestra $\triangle LUV$ y la recta $MT$, con $\overleftrightarrow{MT} \parallel \overline{LU}$. Parece que $\triangle LUV \sim \triangle MTV$. La prueba de párrafo dada usa la conjetura de semejanza AA para probar que esto es cierto. En el Ejemplo A de tu libro, se usa la semejanza de dos triángulos para resolver un problema. Lee el ejemplo y sigue cada paso de la solución.

Mira la figura del Ejemplo A. Observa que $\frac{LE}{EM} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$ y $\frac{NO}{OM} = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$, así que hay más relaciones en la figura que las encontradas usando triángulos semejantes. En la siguiente investigación, explorarás estas relaciones.

## Investigación 1: Paralelas y proporcionalidad

En el Paso 1 de la investigación se dan tres triángulos, cada uno con una recta paralela a un lado que interseca los otros dos lados. Para cada triángulo, encuentra $x$ y después encuentra los valores de las razones especificadas. He aquí la solución a la parte a.

**a.** Usa el hecho de que $\triangle CDE \sim \triangle BDA$ para escribir y resolver una proporción.

$$\frac{DE}{DA} = \frac{DC}{DB}$$ Las partes correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales.

$$\frac{8}{24} = \frac{12}{12 + x}$$ Sustituye las longitudes de la figura.

$$\frac{1}{3} = \frac{12}{12 + x}$$ Simplifica la parte izquierda.

$$\frac{1(3)(12 + x)}{3} = \frac{12(3)(12 + x)}{12 + x}$$ Multiplica ambos lados por $3(12 + x)$.

$$12 + x = 36$$ Simplifica.

$$x = 24$$ Resta 12 de ambos lados.

Por lo tanto, $\frac{DE}{AE} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ y $\frac{DC}{BC} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$.

En cada parte del Paso 1, debes encontrar que las razones entre las longitudes de los segmentos intersecados por la recta paralela son iguales. En otras palabras, si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca los otros dos lados, entonces divide los otros dos lados proporcionalmente.

¿Crees que el recíproco de esta afirmación también es cierto? Esto es, si una recta divide dos lados de un triángulo proporcionalmente, ¿es paralela al tercer lado?

Sigue los Pasos 3–7 de tu libro. Debes encontrar que $\angle PAC \cong \angle PBD$, por lo que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son paralelas.

Repite los Pasos 3–7, pero esta vez elige tus propias longitudes, de manera que $\frac{PA}{AB} = \frac{PC}{CD}$. Nuevamente debes encontrar que $\overline{AC}$ es paralela a $\overline{BD}$. Puedes usar tus descubrimientos en esta investigación para establecer una conjetura.

(continúa)

**C-98**

**Conjetura de paralelismo/proporcionalidad** Si una recta paralela a un lado de un triángulo interseca a los otros dos lados, entonces divide los otros dos lados proporcionalmente. Inversamente, si una recta interseca a dos lados de un triángulo proporcionalmente, entonces es paralela al tercer lado.

El Ejemplo B demuestra la primera parte de la conjetura de paralelismo/proporcionalidad. Escribe una prueba por tu cuenta, antes de leer la de tu libro. Usa el hecho de que $\triangle AXY \sim \triangle ABC$ para establecer una proporción. Después escribe una serie de pasos algebraicos hasta que obtengas $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

## Investigación 2: Paralelismo/proporcionalidad ampliados

En los triángulos del Paso 1, se dibuja más de un segmento paralelo a un lado de un triángulo. Encuentra las longitudes faltantes. He aquí la solución a la parte a. Para encontrar $x$ e $y$, aplica la conjetura de paralelismo/proporcionalidad a los triángulos y rectas apropiados.

**a.** Para encontrar $x$, usa $\triangle AEL$ y $\overline{FT}$.

$$\frac{EF}{FL} = \frac{ET}{TA}$$

$$\frac{21}{35} = \frac{42}{x}$$

$$x = 70$$

Para encontrar $y$, usa $\triangle REG$ y $\overline{LA}$.

$$\frac{EL}{LG} = \frac{EA}{AR}$$

$$\frac{56}{28} = \frac{112}{y}$$

$$y = 56$$

Usando los valores de $x$ e $y$, puedes ver que $\frac{FL}{LG} = \frac{TA}{AR} = \frac{5}{4}$.

Los resultados del Paso 1 conducen a la siguiente conjetura.

**C-99**

**Conjetura ampliada de paralelismo/proporcionalidad** Si dos o más rectas intersecan a dos lados de un triángulo de manera paralela al tercer lado, entonces dividen los dos lados proporcionalmente.

Puedes usar la conjetura ampliada de paralelismo/proporcionalidad para dividir un segmento en cualquier número de partes iguales. En el Ejemplo C de tu libro, se muestra cómo dividir un segmento, $AB$, en partes iguales. Lee el ejemplo atentamente. Para asegurarte de que comprendes el proceso, divide el segmento siguiente, $\overline{XY}$, en tres partes iguales usando un compás y una regla no graduada.

X

Y




# Razones trigonométricas

En esta lección

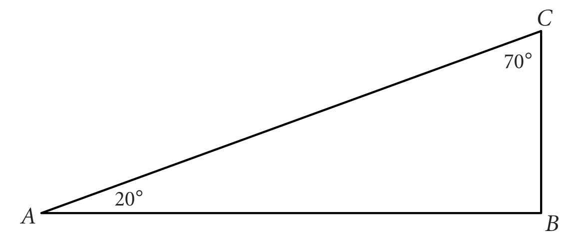
- Conocerás las razones trigonométricas **seno, coseno** y **tangente**
- Usarás las razones trigonométricas para **encontrar las longitudes laterales desconocidas** en triángulos rectángulos
- Usarás las **funciones trigonométricas inversas** para **encontrar las medidas desconocidas de ángulos** en triángulos rectángulos

Lee hasta el Ejemplo A de tu libro. En tu libro se explica que en cualquier triángulo rectángulo con un ángulo agudo de una medida dada, la razón entre la longitud del cateto opuesto al ángulo y la longitud del cateto adyacente al ángulo es igual. La razón se llama la **tangente** del ángulo. En el Ejemplo A se usa el hecho de que $\tan 31° \approx \frac{3}{5}$ para resolver un problema. Lee el ejemplo atentamente.

Además de la tangente, los matemáticos han dado nombre a otras cinco razones relacionadas con las longitudes laterales de los triángulos rectángulos. En este libro, trabajarás con tres razones: el **seno,** el **coseno** y la **tangente,** abreviados sin, cos y tan. Estas razones se definen en las páginas 641–642 de tu libro.

### Investigación: Tablas trigonométricas

Mide las longitudes laterales de $\triangle ABC$, redondeando al milímetro más cercano. Después usa las longitudes laterales y las definiciones de seno, coseno y tangente para llenar la fila "Primer $\triangle$" de la tabla. Expresa las razones como decimales, redondeando a la milésima más cercana.




| | $m\angle A$ | sin $A$ | cos $A$ | tan $A$ | $m\angle C$ | sin $C$ | cos $C$ | tan $C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Primer $\triangle$** | 20° | | | | 70° | | | |
| **Segundo $\triangle$** | 20° | | | | 70° | | | |
| **Promedio** | — | | | | — | | | |

Ahora usa tu transportador para dibujar un triángulo rectángulo diferente *ABC*, con $m\angle A = 20°$ y $m\angle C = 70°$. Mide los lados redondeando a la milésima más cercana y llena la fila "Segundo $\triangle$" de la tabla.

Calcula el promedio de cada razón y anota los resultados en la última fila de la tabla. Busca patrones en tu tabla. Debes encontrar que $\sin 20° = \cos 70°$ y $\sin 70° = \cos 20°$. También observa que $\tan 20° = \frac{1}{\tan 70°}$ y $\tan 70° = \frac{1}{\tan 20°}$. Usa las definiciones de seno, coseno y tangente para explicar por qué existen estas relaciones.

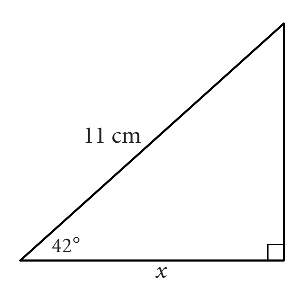
Puedes usar tu calculadora para encontrar el seno, coseno o tangente de cualquier ángulo. Experimenta con tu calculadora hasta que lo logres. Después usa tu calculadora para encontrar sin 20°, cos 20°, tan 20°, sin 70°, cos 70° y tan 70°. Compara los resultados con las razones que encontraste midiendo los lados.

(continúa)

## Lección 12.1 • Razones trigonométricas (continuación)

Puedes usar las razones trigonométricas para encontrar longitudes laterales desconocidas de un triángulo rectángulo, dadas las medidas de cualquier lado y cualquier ángulo agudo. Lee el Ejemplo B de tu libro y después lee el Ejemplo A a continuación.

***EJEMPLO A*** Encuentra el valor de $x$.




**► *Solución*** Necesitas encontrar la longitud del cateto adyacente al ángulo de 42°. Se te da la longitud de la hipotenusa. La razón trigonométrica que relaciona el cateto adyacente con la hipotenusa es la razón coseno.

$$\cos 42° = \frac{x}{11}$$

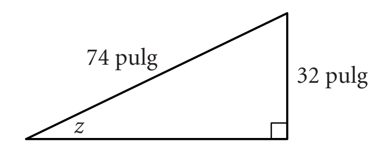
$$11 \cdot \cos 42° = x \qquad \text{Multiplica ambos lados por 11.}$$

$$8.17 \approx x \qquad \text{Usa tu calculadora para encontrar } \cos 42° \text{ y multiplica el resultado por 11.}$$

El valor de $x$ es aproximadamente 8.2 cm.

Si conoces las longitudes de cualesquier dos lados de un triángulo rectángulo, puedes usar las *funciones trigonométricas inversas* para encontrar las medidas de los ángulos. En el Ejemplo C de tu libro se muestra cómo usar la función tangente inversa, o $\tan^{-1}$. En el ejemplo siguiente se usa la función seno inverso, o $\sin^{-1}$.

***EJEMPLO B*** Encuentra la medida del ángulo opuesto al cateto de 32 pulgadas.




**► *Solución*** Se te dan las longitudes del cateto opuesto al ángulo y la hipotenusa. La razón que relaciona estas longitudes es la razón seno.

$$\sin z = \frac{32}{74}$$

$$\sin^{-1}(\sin z) = \sin^{-1}\left(\frac{32}{74}\right) \qquad \text{Saca el seno inverso de ambos lados.}$$

$$z = \sin^{-1}\left(\frac{32}{74}\right) \qquad \text{La función inversa del seno revierte la función del seno.}$$

$$z \approx 25.6° \qquad \text{Usa tu calculadora para encontrar } \sin^{-1}\left(\tfrac{32}{74}\right).$$

La medida del ángulo opuesto al lado de 32 pulgadas es aproximadamente 26°.

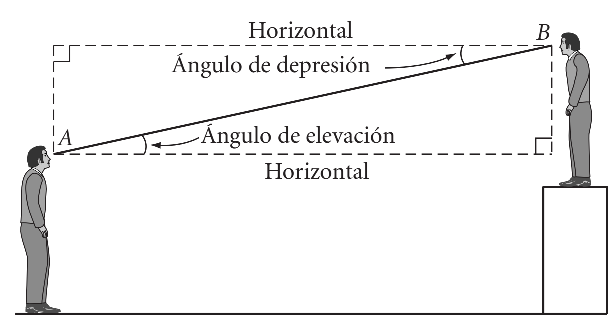



# Resolución de problemas con triángulos rectángulos

En esta lección

- Usarás la trigonometría para **resolver problemas que incluyen triángulos rectángulos**

La trigonometría de los triángulos rectangulos se utiliza frecuentamente para encontrar la altura de un objeto alto de manera indirecta. Para resolver un problema de este tipo, mide el ángulo desde la horizontal hasta tu recta de visión, cuando veas la parte superior o inferior del objeto.

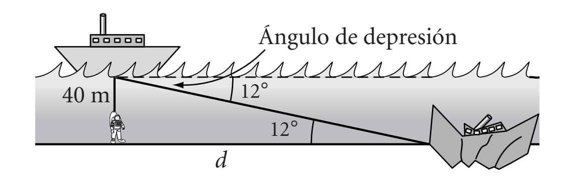



Si miras hacia arriba, medirás el **ángulo de elevación.** Si miras hacia abajo, medirás el **ángulo de depresión.**

En el ejemplo de tu libro se usa el ángulo de elevación para encontrar una distancia de manera indirecta. Lee el ejemplo atentamente. Intenta resolver el problema por tu cuenta, antes de leer la solución. Después trata de resolver los problemas de los ejemplos siguientes. El Ejemplo A es el Ejercicio 13 en tu libro y tiene que ver con un ángulo de depresión.

***EJEMPLO A*** El sonar de un barco de salvamento localiza los restos de un naufragio en un ángulo de depresión de 12°. Un buzo es bajado 40 metros hasta el fondo del mar. ¿Cuánto necesita avanzar el buzo por el fondo para encontrar los restos del naufragio?

▶ ***Solución*** Haz un dibujo para ilustrar la situación. Observa que como el fondo del mar es paralelo a la superficie del agua, el ángulo de elevación desde los restos del naufragio hasta el barco es igual al ángulo de depresión desde el barco hasta los restos del naufragio (según la conjetura AIA).




La distancia que el buzo es bajado (40 m) es la longitud del cateto opuesto al ángulo de 12°. La distancia que el buzo necesita avanzar es la longitud del cateto adyacente al ángulo de 12°. Establece la razón tangente.

$$\tan 12° = \frac{40}{d}$$

$$d\tan 12° = 40$$

$$d = \frac{40}{\tan 12°}$$

$$d \approx 188.19$$

El buzo necesita avanzar aproximadamente 188 metros para llegar a los restos del naufragio.

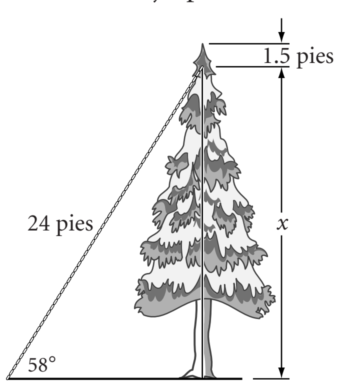
**(continúa)**

***EJEMPLO B***

Un árbol de hoja perenne está sostenido por un alambre que se extiende desde 1.5 pies debajo de la parte superior del árbol hasta una estaca en el suelo. El alambre mide 24 pies de largo y forma un ángulo de 58° con el suelo. ¿Qué altura tiene el árbol?

► ***Solución***

Haz un dibujo para ilustrar la situación.




La longitud de la hipotenusa está dada, y la distancia desconocida es la longitud del lado opuesto al ángulo de 58°. Establece la razón seno.

$$\sin 58° = \frac{x}{24}$$

$$24 \cdot \sin 58° = x$$

$$20.4 \approx x$$

La distancia desde el suelo hasta el punto donde el alambre se sujeta al árbol es aproximadamente 20.4 pies. Como el alambre se sujeta a 1.5 pies debajo de la parte superior del árbol, la altura es aproximadamente 20.4 + 1.5, ó 21.9 pies.




# La Ley de los senos

En esta lección

- Encontrarás el **área de un triángulo** cuando conoces las longitudes de dos lados y la medida del ángulo incluido
- Derivarás la **Ley de los senos,** que relaciona las longitudes laterales de un triángulo con los senos de las medidas de los ángulos
- **Usarás la Ley de los senos para encontrar una longitud lateral desconocida** de un triángulo cuando conoces las medidas de dos ángulos y un lado, **o para encontrar una medida desconocida de un ángulo *agudo*,** cuando conoces las medidas de dos lados y un ángulo

Has usado la trigonometría para resolver problemas que tienen que ver con los triángulos rectángulos. En las siguientes dos lecciones verás que puedes usar la trigonometría con *cualquier* triángulo.

En el Ejemplo A de tu libro, se dan las longitudes de dos lados de un triángulo y la medida del ángulo incluido, y se muestra cómo encontrar el área. Lee el ejemplo atentamente. En la siguiente investigación generalizarás el método usado en el ejemplo.

## Investigación 1: Área de un triángulo

En el Paso 1 se dan tres triángulos con las longitudes de dos lados y la medida del ángulo incluido rotulada. Usa el Ejemplo A como guía para encontrar el área de cada triángulo. He aquí una solución de la parte b.

**b.** Primero encuentra $h$.

$$\sin 72° = \frac{h}{21}$$

$$21 \cdot \sin 72° = h$$

Ahora encuentra el área.

$$A = 0.5bh$$

$$A = 0.5(38.5)(21 \cdot \sin 72°)$$

$$A \approx 384.46$$

El área es aproximadamente 384 $cm^2$.

Después usa el triángulo que se muestra en el Paso 2 para derivar una fórmula general. La conjetura siguiente resume los resultados.

**Conjetura SAS del área de un triángulo** El área de un triángulo está dada por la fórmula $A = \frac{1}{2}ab \sin C$, donde $a$ y $b$ son las longitudes de dos lados y $C$ es el ángulo entre ellos. **C-100**

**(continúa)**

Puedes usar lo que has aprendido para derivar la propiedad que se llama la Ley de los senos.

## Investigación 2: La Ley de los senos

Completa los Pasos 1–3 de tu libro. A continuación se muestran los resultados que debes encontrar.

**Paso 1** $\sin B = \frac{h}{a}$, de manera que $h = a \sin B$

**Paso 2** $\sin A = \frac{h}{b}$, de manera que $h = b \sin A$

**Paso 3** Como ambos $b \sin A$ y $a \sin B$ son iguales a $h$, puedes igualarlos.

$$b \sin A = a \sin B$$

$$\frac{b \sin A}{ab} = \frac{a \sin B}{ab} \quad \text{Divide ambos lados entre } ab.$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \quad \text{Simplifica.}$$

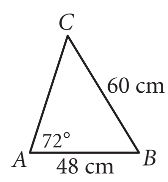
Ahora completa los Pasos 4–6. Combina los Pasos 3 y 6 para obtener esta conjetura.

**Ley de los senos** Dado un triángulo con ángulos $A$, $B$ y $C$ y lados de longitudes $a$, $b$ y $c$ ($a$ opuesto a $A$, $b$ opuesto a $B$ y $c$ opuesto a $C$), $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$. **C-101**

El Ejemplo B de tu libro muestra cómo usar la Ley de los senos para encontrar las longitudes laterales de un triángulo cuando conoces la longitud de un lado y las medidas de dos ángulos. Intenta resolver el problema por tu cuenta, antes de leer la solución.

Lee el texto anterior al Ejemplo C, donde se explica que puedes usar la Ley de los senos para encontrar la medida de un ángulo faltante *solamente si* sabes si el ángulo es agudo u obtuso. Sólo se te pedirá que encuentres medidas de ángulos agudos. En el Ejemplo C se muestra cómo hacer esto. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO*** Encuentra la medida del ángulo agudo $C$.




***Solución*** Usa la Ley de los senos.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{48 \sin 72°}{60}$$

$$C = \sin^{-1}\left(\frac{48 \sin 72°}{60}\right)$$

$$C \approx 49.54$$

La medida de $\angle C$ es aproximadamente 50°.




# La Ley de los cosenos

En esta lección

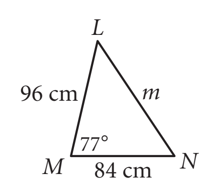
- Usarás la **Ley de los cosenos** para encontrar las longitudes laterales y las medidas de los ángulos en un triángulo

Has resuelto muchos problemas usando el Teorema de Pitágoras. El Teorema de Pitágoras es una herramienta muy poderosa para resolver problemas, pero está limitada a los triángulos rectángulos. Hay una relación más general que se aplica a todos los triángulos.

Piensa en un ángulo recto formado por una bisagra con dos catetos de longitud fija como lados. ¿Qué le ocurre a la longitud del tercer lado (la hipotenusa cuando el ángulo mide 90º) y a la relación pitagórica a medida que la bisagra se cierra hasta ser menor que un ángulo rectángulo o se abre más que un ángulo rectángulo? Para explorar esta pregunta, observa los triángulos en la parte superior de la página 661 y lee los siguientes párrafos, incluyendo la Ley de los cosenos. Agrega la Ley de los cosenos a tu lista de conjeturas.

La Ley de los cosenos funciona para los triángulos agudos y obtusos. Lee la derivación de la Ley de los cosenos para los triángulos agudos en la página 662 de tu libro. En el Ejemplo A, la Ley de los cosenos se usa para hallar la longitud del tercer lado de un triángulo cuando se te dan las longitudes de dos lados y la medida de su ángulo incluido. Lee el Ejemplo A de tu libro. Luego completa los pasos del Ejemplo A siguiente.

***EJEMPLO A*** Encuentra $m$, la longitud del lado $\overline{NL}$ en el $\triangle LMN$ acutángulo.




▶ ***Solución*** Usa la Ley de los cosenos y resuelve para $m$.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ La Ley de los cosenos.

$m^2 = 96^2 + 84^2 - 2(96)(84)(\cos 77°)$ Sustituye $c$ por $m$, $a$ por 96, $b$ por 84 y $C$ por 77°.

$m = \sqrt{96^2 + 84^2 - 2(96)(84)(\cos 77°)}$ Saca la raíz cuadrada positiva de ambos lados.

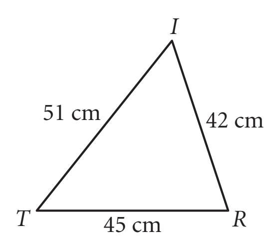
$m \approx 112.45$ Halla el valor numérico.

La longitud del lado $\overline{NL}$ es aproximadamente 112 cm.

**(continúa)**

En el Ejemplo B de tu libro se usa la Ley de los cosenos para encontrar una medida de ángulo. He aquí otro ejemplo. Resuelve el problema por tu cuenta antes de leer la solución.

***EJEMPLO B*** Encuentra la medida de $\angle I$ en $\triangle TRI$.




***Solución*** Usa la Ley de los cosenos y resuelve para $I$.

| | |
|---|---|
| $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ | La Ley de los cosenos. |
| $45^2 = 51^2 + 42^2 - 2(51)(42)(\cos I)$ | Sustituye $c$ por 45, $a$ por 51, $b$ por 42 y $C$ por $I$. |
| $\cos I = \dfrac{45^2 - 51^2 - 42^2}{-2(51)(42)}$ | Resuelve para cos $I$. |
| $I = \cos^{-1}\left(\dfrac{45^2 - 51^2 - 42^2}{-2(51)(42)}\right)$ | Saca el coseno inverso de ambos lados. |
| $I \approx 56.89$ | Halla el valor numérico. |

La medida de $\angle I$ es aproximadamente 57°.




# Resolución de problemas con trigonometría

En esta lección

- Usarás la trigonometría para resolver problemas, incluso aquellos que tienen que ver con los **vectores**

Algunas de las aplicaciones prácticas de la trigonometría tienen que ver con los vectores. En actividades vectoriales previas, usaste una regla y un transportador para medir el tamaño del vector resultante y el ángulo entre los vectores. Ahora podrás calcular los vectores resultantes usando la Ley de los senos y la Ley de los cosenos.

En el ejemplo de tu libro, se usa la Ley de los cosenos para encontrar la longitud de un vector resultante y la Ley de los senos para encontrar su dirección. Lee el ejemplo y asegúrate de que comprendes cada paso.

El ejemplo siguiente es el Ejercicio 5 de tu libro. Intenta resolver el problema por tu cuenta, antes de leer la solución.

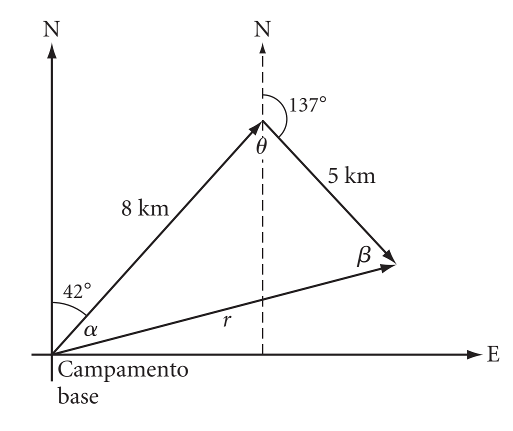
***EJEMPLO*** Annie y Sashi están acampando en la Sierra Nevada. Caminan 8 km desde su campamento base, con un rumbo de 42°. Después del almuerzo, cambian de dirección con un rumbo de 137° y caminan otros 5 km.

**a.** ¿A qué distancia están Annie y Sashi de su campamento base?

**b.** ¿Con qué rumbo deben caminar Sashi y Annie para regresar a su campamento base?

▸ ***Solución***

**a.** Dibuja un diagrama para ilustrar la situación. (Recuerda que un rumbo se mide en el sentido de las manecillas del reloj, desde el norte.) Aquí la distancia desde el campamento base es $r$. Para encontrar $r$, puedes encontrar el valor de $\theta$ y luego usar la Ley de los cosenos.




Considera $\theta$ como formada por dos partes, la parte a la izquierda de la vertical y la parte a la derecha. Usando la conjetura AIA, la parte a la izquierda tiene una medida de 42°. Como la parte a la derecha y el ángulo de 137° son un par lineal, la parte a la derecha tiene una medida de 43°. Por lo tanto, la medida de $\theta$ es 42° + 43°, u 85°. Ahora usa la Ley de los cosenos.

$$r^2 = 8^2 + 5^2 - 2(8)(5)(\cos 85°)$$

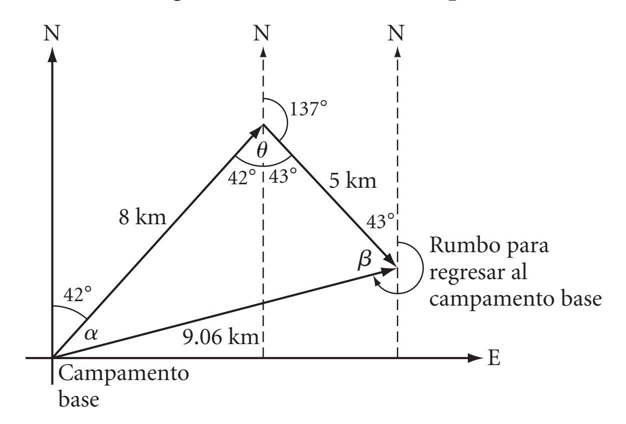
$$r = \sqrt{8^2 + 5^2 - 2(8)(5)(\cos 85°)}$$

$$r \approx 9.06$$

Sashi y Annie están aproximadamente a 9.1 km de su campamento base.

**(continúa)**

**b.** Añade al diagrama la información que encontraste en la parte a.




El diagrama indica que el rumbo que Sashi y Annie deben tomar para regresar al campamento base es 360° − (43° + $\beta$). Para encontrar $\beta$, usa la Ley de los senos.

$$\frac{\sin\beta}{8} \approx \frac{\sin 85°}{9.06}$$

$$\sin\beta \approx \frac{8\sin 85°}{9.06}$$

$$\beta \approx \sin^{-1}\left(\frac{8\sin 85°}{9.06}\right)$$

$$\beta \approx 61.6$$

$\beta$ es aproximadamente 62°, así que el rumbo es aproximadamente 360° − (43° + 62°), ó 255°.




# Las premisas de la geometría

En esta lección

- Conocerás el **sistema deductivo** de Euclides para organizar las propiedades de la geometría
- Te familiarizarás con los cuatro tipos de premisas para la geometría

Aproximadamente desde el año 600 A.C., los matemáticos comenzaron a usar el razonamiento lógico para deducir ideas matemáticas. El matemático griego Euclides (ca. 325–265 A.C.) creó un **sistema deductivo** para organizar las propiedades de la geometría. Comenzó con una simple recopilación de afirmaciones llamadas **postulados.** Consideró estos postulados como verdades evidentes que no requerían ser probadas. Después, Euclides demostró de manera sistemática cómo cada descubrimiento geométrico se deducía lógicamente de sus postulados y sus conjeturas previamente probadas, o **teoremas.**

Hasta ahora, has usado pruebas informales para explicar por qué ciertas conjeturas son verdaderas. Sin embargo, en tus pruebas a menudo te basaste en conjeturas no probadas. Una conclusión en una prueba es cierta si y solamente si tus premisas son ciertas y todos tus argumentos son válidos.

En este capítulo considerarás la geometría como lo hizo Euclides. Comenzarás con premisas y sistemáticamente probarás tus conjeturas anteriores. Una vez que hayas probado una conjetura, ésta se convierte en un teorema que puedes usar para probar otras conjeturas. Lee los cuatro tipos de premisas en la página 693 de tu libro.

Ya estás familiarizado con el primer tipo de premisa. Has aprendido los términos indefinidos—punto, recta, y plano—y tienes una lista de definiciones en tu cuaderno.

El segundo tipo de premisa son las propiedades de la aritmética, la igualdad y la congruencia. Lee estas propiedades de aritmética e igualdad de tu libro. Has usado estas propiedades muchas veces para resolver ecuaciones algebráicas. En el ejemplo de tu libro se muestra la solución de una ecuación algebráica, junto con el motivo de cada paso. Este tipo de solución, paso por paso, es en realidad una prueba algebráica. He aquí otro ejemplo.

***EJEMPLO*** Prueba que si $(a + b)(a - b) = (a + b)(a + b)$ y $a + b \neq 0$, entonces $b = 0$.

▶ ***Solución***

| | |
|---|---|
| $(a + b)(a - b) = (a + b)(a + b)$ | Dado. |
| $a - b = a + b$ | Propiedad de la división de la igualdad ($a + b \neq 0$) |
| $a = a + 2b$ | Propiedad de la suma de la igualdad |
| $0 = 2b$ | Propiedad de la resta de la igualdad |
| $0 = b$ | Propiedad de la división de la igualdad |

**(continúa)**

Al igual que usas la igualdad para expresar una relación entre los números, usas la congruencia para expresar una relación entre las figuras geométricas. Lee la definición de congruencia en la página 695 de tu libro. A continuación están las propiedades de la congruencia.

## Propiedades de la congruencia

En las afirmaciones siguientes, "figura" se refiere a un segmento, un ángulo o una forma geométrica.

**Propiedad reflexiva de la congruencia**

Cualquier figura es congruente consigo misma.

**Propiedad transitiva de la congruencia**

Si Figura A ≅ Figura B y Figura B ≅ Figura C, entonces Figura A ≅ Figura C.

**Propiedad simétrica de la congruencia**

Si Figura A ≅ Figura B, entonces Figura B ≅ Figura A.

El tercer tipo de premisa son los postulados de la geometría. Los postulados son afirmaciones básicas que son útiles y fáciles de aceptar. Lee los postulados de la geometría en las páginas 696–697 de tu libro.

Algunos de los postulados te permiten añadir rectas, segmentos y puntos auxiliares a un diagrama. Por ejemplo, puedes usar el postulado de rectas para construir una diagonal de un polígono, y puedes usar el postulado de perpendiculares para construir una altitud en un triángulo.

Observa que la conjetura de los ángulos correspondientes y su recíproco están formulados como un postulado, pero la conjetura de los ángulos alternos internos no lo está. Esto significa que necesitarás probar la conjetura de los ángulos alternos internos antes de que puedas usarla para probar otras conjeturas. De manera similar, las conjeturas de congruencia SSS, SAS y ASA se establecieron como postulados, pero SAA no, así que necesitarás probarla.

El cuarto tipo de premisa son las conjeturas geométricas anteriormente probadas, o teoremas. Cada vez que pruebas una conjetura, puedes renombrarla como un teorema y añadirlo a tu lista de teoremas. Puedes usar los teoremas de tu lista para probar las conjeturas.




# Planear una prueba de geometría

En esta lección

- Aprenderás las **cinco tareas** que tienen que ver con la **formulación de una prueba**
- Probarás varias conjeturas respecto a los ángulos
- Aprenderás cómo crear un **árbol genealógico lógico** para un teorema

Una prueba en geometría es una sucesión de afirmaciones que comienza con un conjunto dado de premisas y que conduce a una conclusión válida. Cada afirmación debe ser la continuación de las afirmaciones previas y debe estar respaldada por un motivo. El motivo debe provenir del conjunto de premisas que conociste en la Lección 13.1.

La formulación de una prueba requiere cinco tareas. La Tarea 1 es para identificar lo que se te ha dado y lo que debes demostrar. Esto es más fácil si la conjetura es una afirmación *condicional,* o de "si-entonces". La parte "si" es lo que se te da y la parte "entonces" es lo que debes demostrar. Si una conjetura no se da en esta forma, con frecuencia se puede reformular. Por ejemplo, la conjetura "Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes" puede reformularse como "Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes".

La Tarea 2 es para hacer un diagrama y marcarlo de forma tal que ilustre la información dada. La Tarea 3 es para reformular la información "dada" y "demostrada" en términos del diagrama. La Tarea 4 es para elaborar un plan para tu prueba, organizando tu razonamiento ya sea mentalmente o por escrito. La Tarea 5 es para usar tu plan para formular la prueba. En la página 703 de tu libro se resumen las tareas involucradas en la escritura de una prueba.

En la página 704 de tu libro se da una prueba de organigrama (*flowchart*) de la conjetura de los ángulos opuestos por el vértice. Observa que la prueba usa solamente postulados, definiciones y propiedades de la igualdad. Por lo tanto, es una prueba válida. Ahora puedes llamar a esta conjetura el teorema de los ángulos opuestos por el vértice (VA) y añadirlo a tu lista de teoremas.

En la Lección 13.1, la conjetura de los ángulos correspondientes (CA) se reformuló como un postulado, pero no es el caso de la conjetura de los ángulos alternos internos (AIA). En el Ejemplo A de tu libro se analiza el proceso de las cinco tareas para probar la conjetura AIA. Lee el ejemplo atentamente y después añade el teorema AIA a tu lista de teoremas.

El Ejemplo B prueba la conjetura de la suma de los ángulos de un triángulo. La prueba requiere usar el postulado de las paralelas para construir una recta paralela a un lado del triángulo. Después de que leas y comprendas la prueba, añade el teorema de la suma de los ángulos de un triángulo a tu lista de teoremas.

En las páginas 706–707 de tu libro, se da una prueba de la conjetura del tercer ángulo. Lee la prueba y después añade el teorema del tercer ángulo a tu lista de teoremas.

Un *árbol genealógico lógico* de un teorema hace una relación de todos los postulados en los que se apoya el teorema. En la página 707 de tu libro, verás cómo construir un árbol genealógico lógico para el teorema del tercer ángulo.

**(continúa)**

Asegúrate de comprender cómo se arraiga en cuatro postulados: el postulado de las paralelas, el postulado CA, el postulado del par lineal y el postulado de la suma de los ángulos.

En la página 707 puedes ver que el teorema del tercer ángulo sigue del teorema de la suma de los triángulos independientemente de cualquier otro teorema o postulado. Un teorema que es consecuencia inmediata de otro teorema probado se llama un **corolario**. Entonces, el teorema del tercer ángulo es un corolario del teorema de la suma de triángulos.

El siguiente ejemplo es el Ejercicio 8 de tu libro. Ilustra el proceso de las cinco tareas para probar el recíproco del teorema de los ángulos alternos internos.

***EJEMPLO*** Prueba el recíproco del teorema AIA: Si dos rectas son intersecadas por una transversal, formando ángulos alternos internos congruentes, entonces las rectas son paralelas. Después crea un árbol genealógico lógico para el recíproco del teorema AIA.

▶ ***Solución*** Tarea 1: Identifica lo que se te da y lo que debes demostrar.

**Dado:** Dos rectas intersecadas por una transversal para formar unos ángulos alternos internos congruentes

**Demuestra:** Las rectas son paralelas

Tarea 2: Dibuja y rotula un diagrama.

(*Nota*: Tal vez no te des cuenta de que rotular ∠3 es útil, hasta que elabores tu plan.)

Tarea 3: Reformula la información dada y la por demostrar en términos de tu diagrama.



**Dado:** $\ell_1$ y $\ell_2$ intersecadas por la transversal $\ell_3$; $\angle 1 \cong \angle 2$

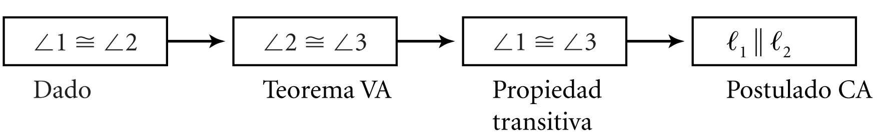
**Demuestra:** $\ell_1 \parallel \ell_2$

Tarea 4: Elabora un plan.

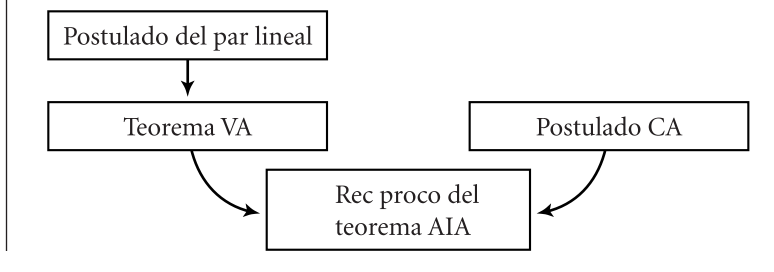
**Plan:** Necesito probar que $\ell_1 \parallel \ell_2$. El único teorema o postulado que tengo para demostrar que las rectas son paralelas es el postulado CA. Si puedo demostrar que $\angle 1 \cong \angle 3$, puedo usar el postulado CA para concluir que $\ell_1 \parallel \ell_2$. Sé que $\angle 1 \cong \angle 2$. Según el teorema VA, $\angle 2 \cong \angle 3$. Por lo tanto, según la propiedad transitiva de la congruencia, $\angle 1 \cong \angle 3$.

Tarea 5: Crea una prueba.

**Prueba de organigrama**




He aquí un árbol genealógico lógico para el recíproco del teorema AIA.






# Pruebas de los triángulos

En esta lección

- Probarás unas conjeturas que tienen que ver con las **propiedades de los triángulos**
- Aprenderás a escribir una **prueba de dos columnas**

En esta lección te concentrarás en las pruebas de triángulos. Lee la lección en tu libro. En ella se presenta el proceso de las cinco tareas para probar la conjetura de la bisectriz de ángulo y se te explica cómo escribir una **prueba de dos columnas.** Los ejemplos siguientes son los Ejercicios 1 y 2 de tu libro. Para cada ejemplo, escribe cada prueba por tu cuenta, antes de leer la solución.

***EJEMPLO A*** Escribe una prueba de organigrama de la conjectura de la mediatriz: Si un punto está en la mediatriz de un segmento, entonces es equidistante a los extremos del segmento.

***Solución*** Tarea 1: Identifica lo que se te da y lo que debes demostrar.

**Dado:** Un punto en la mediatriz de un segmento

**Demuestra:** El punto es equidistante de los extremos del segmento

Tarea 2: Dibuja y rotula un diagrama para ilustrar la información dada.

Tarea 3: Reformula la información dada y la por demostrar, en términos del diagrama.

**Dado:** $\overleftrightarrow{PQ}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$

**Demuestra:** $PA = PB$

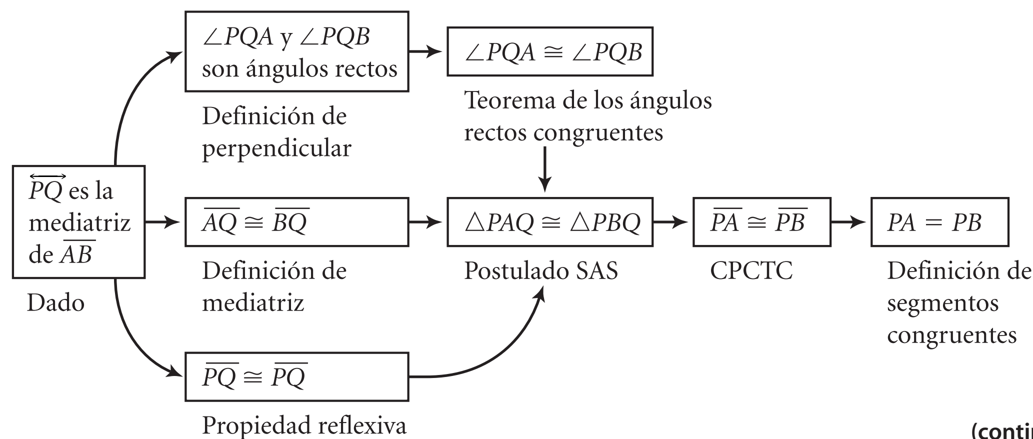
Tarea 4: Planea una prueba.

**Plan:** Puedo demostrar que $PA = PB$ si $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son partes correspondientes de triángulos congruentes. Sé que $\overline{AQ} \cong \overline{BQ}$ y que $\angle PQA \cong \angle PQB$. También sé que $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$. Así pues, $\triangle PAQ \cong \triangle PBQ$ según el postulado SAS. Por lo tanto, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ según CPCTC, así que $PA = PB$.



Tarea 5: Escribe una prueba basándote en tu plan.

**Prueba de organigrama**




**(continúa)**

***EJEMPLO B***

Escribe una prueba de dos columnas del recíproco del teorema de la mediatriz: Si un punto es equidistante de los extremos de un segmento, entonces se encuentra sobre la mediatriz del segmento.

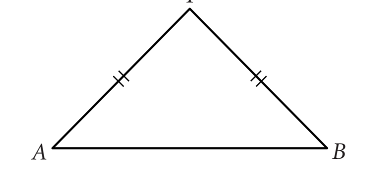
▶ ***Solución***

Tarea 1: Identifica lo que se te da y lo que debes demostrar.

**Dado:** Un punto que es equidistante de los extremos de un segmento

**Demuestra:** El punto se encuentra sobre la mediatriz del segmento

Tarea 2: Dibuja y rotula un diagrama para ilustrar la información dada.



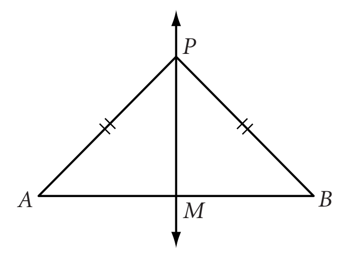

Tarea 3: Reformula la información dada y la por demostrar en términos del diagrama.

**Dado:** $PA = PB$

**Demuestra:** $P$ se encuentra sobre la mediatriz de $\overline{AB}$

Tarea 4: Planea una prueba.

**Plan:** Puedo comenzar construyendo el punto medio $M$ de $\overline{AB}$ y $\overleftrightarrow{PM}$. Sé que $\overleftrightarrow{PM}$ es una bisectriz de $\overline{AB}$, de manera que sólo necesito demostrar que es perpendicular a $\overline{AB}$. Puedo demostrar que $\triangle PAM \cong \triangle PBM$ según SSS. Por lo tanto, $\angle PMA \cong \angle PMB$. Como los ángulos forman un par lineal, son suplementarios, de manera que cada uno mide 90°. Así pues, $\overleftrightarrow{PM} \perp \overline{AB}$.




Tarea 5: Escribe una prueba basándote en tu plan.

| **Afirmación** | **Motivo** |
|---|---|
| **1.** Construye el punto medio $M$ de $\overline{AB}$ | **1.** Postulado del punto medio |
| **2.** Construye $\overleftrightarrow{PM}$ | **2.** Postulado de las rectas |
| **3.** $PA = PB$ | **3.** Dado |
| **4.** $\overline{PA} \cong \overline{PB}$ | **4.** Definición de la congruencia |
| **5.** $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ | **5.** Definición del punto medio |
| **6.** $\overline{PM} \cong \overline{PM}$ | **6.** Propiedad reflexiva de la congruencia |
| **7.** $\triangle PAM \cong \triangle PBM$ | **7.** Postulado SSS |
| **8.** $\angle PMA \cong \angle PMB$ | **8.** CPCTC |
| **9.** $\angle PMA$ y $\angle PMB$ son suplementarios | **9.** Postulado del par lineal |
| **10.** $\angle PMA$ y $\angle PMB$ son ángulos rectos | **10.** Teorema de la congruencia y la suplementariedad |
| **11.** $\overleftrightarrow{PM} \perp \overline{AB}$ | **11.** Definición de perpendicular |
| **12.** $\overleftrightarrow{PM}$ es la mediatriz de $\overline{AB}$ | **12.** Definición de la mediatriz |




# Pruebas de los cuadriláteros

En esta lección

- Probarás unas conjeturas que tienen que ver con las **propiedades de los cuadriláteros**
- Aprenderás el término **lema**

Puedes probar muchos teoremas de cuadriláteros usando los teoremas de los triángulos. Por ejemplo, puedes probar algunas propiedades de los paralelogramos usando el hecho de que una diagonal divide un paralelogramo en dos triángulos congruentes. Este hecho es un ejemplo de un **lema** (*lemma*). Un lema es un teorema auxiliar que se usa específicamente para probar otros teoremas. En tu libro se da la prueba de este lema como un ejemplo. Intenta probarlo por tu cuenta, antes de ver la solución. Llámalo el lema de una diagonal de un paralelogramo y añádelo a tu lista de teoremas.

## Desarrollo de una prueba: Prueba de conjeturas sobre paralelogramos

En esta actividad probarás tres de tus conjeturas anteriores respecto a los paralelogramos. Recuerda dibujar un diagrama, reformular lo que se te da y lo que debes demostrar en términos de tu diagrama, y después elaborar un plan antes de escribir tu prueba.

Completa el Paso 1 de tu libro. (*Sugerencia:* La prueba será muy fácil si usas el lema de una diagonal de un paralelogramo.)

Ahora completa el Paso 2. (¡No olvides el lema!)

En el Paso 3 se te pide expresar y probar el recíproco de la conjetura de los lados opuestos. El proceso de las cinco tareas se inicia a continuación.

Tarea 1: Identifica lo que se te da y lo que debes demostrar.

**Dado:** Un cuadrilátero con lados opuestos que son congruentes

**Demuestra:** El cuadrilátero es un paralelogramo

Tarea 2: Dibuja y rotula un diagrama para ilustrar la información dada.

Tarea 3: Reformula la información dada y la por demostrar en términos del diagrama.

**Dado:** El cuadrilátero *ABCD* con $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

**Demuestra:** *ABCD* es un paralelogramo

Tarea 4: Elabora un plan.

Trata de hacer un plan por tu cuenta. He aquí algunas sugerencias para que comiences:

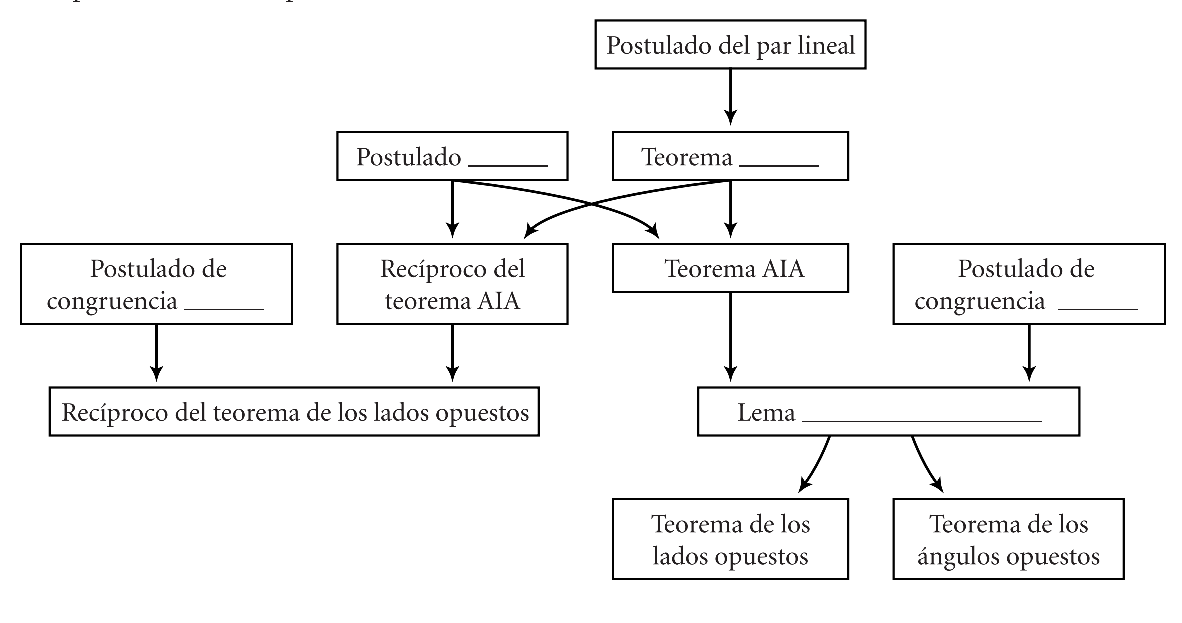
- Hasta ahora todas las pruebas de los cuadriláteros han implicado dibujar una diagonal para formar triángulos. Considera usar ese método aquí.
- Necesitas demostrar que los lados opuestos de *ABCD* son paralelos. Haz un repaso y encuentra los teoremas y postulados que puedan usarse para probar que dos rectas son paralelas. ¿Cuál crees que sería más útil en esta situación?
- ¿Cómo pueden ayudarte los postulados de congruencia de los triángulos en tu prueba?

**(continúa)**

Tarea 5: Escribe una prueba.

Ahora, ¡haz la prueba por tu cuenta!

El Paso 4 te pide crear un árbol genealógico para los teoremas que probaste en esta investigación. Trata de llenar los espacios en blanco en el siguiente árbol que está parcialmente completo.



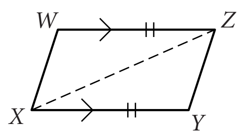

El siguiente ejemplo es el Ejercicio 2 de tu libro.

***EJEMPLO*** Prueba la conjetura de los lados opuestos paralelos y congruentes: Si un par de lados opuestos de un cuadrilátero son paralelos y congruentes, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

▶ ***Solución***

**Dado:** $\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$; $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$

**Demuestra:** *WXYZ* es un paralelogramo




| **Afirmación** | **Motivo** |
|---|---|
| **1.** Construye $\overline{XZ}$ | **1.** Postulado de rectas |
| **2.** $\overline{WZ} \parallel \overline{XY}$ | **2.** Dado |
| **3.** $\angle WZX \cong \angle YXZ$ | **3.** Teorema AIA |
| **4.** $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$ | **4.** Dado |
| **5.** $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$ | **5.** Propiedad reflexiva de la congruencia |
| **6.** $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$ | **6.** Postulado de congruencia SAS |
| **7.** $\angle WXZ \cong \angle YZX$ | **7.** CPCTC |
| **8.** $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ | **8.** Recíproco del teorema AIA |
| **9.** *WXYZ* es un paralelogramo | **9.** Definición de paralelogramo |




# Prueba indirecta

En esta lección

- Aprenderás a demostrar afirmaciones matemáticas de **manera indirecta**

Considera esta pregunta con múltiples opciones:

¿Qué persona ganó un premio Nobel dos veces?

**A.** Sherlock Holmes

**B.** Leonardo da Vinci

**C.** Marie Curie

**D.** Tiger Woods

Tal vez no puedas responder de manera inmediata, pero puedes intentar eliminar algunas opciones, hasta que sólo quede una posibilidad. Sherlock Holmes no puede ser la respuesta correcta porque es un personaje ficticio. Leonardo da Vinci murió mucho antes de que se otorgaran los premios Nobel. Como no hay ningún premio Nobel de golf, también puedes eliminar a Tiger Woods. Esto deja una sola posibilidad, Marie Curie. La opción C debe ser la respuesta.

El tipo de razonamiento que usaste para responder esta pregunta con múltiples opciones se conoce como *razonamiento indirecto*. Puedes usar este mismo tipo de razonamiento para escribir una **prueba indirecta** de una afirmación matemática.

Para cualquier afirmación matemática, existen dos posibilidades: ya sea que la proposición sea cierta o que sea falsa. Para probar de manera indirecta que una proposición es cierta, se comienza suponiendo que no lo es. Entonces se usa el razonamiento lógico para demostrar que esta suposición conduce a una contradicción. Si una suposición conduce a una contradicción, debe ser falsa. Por lo tanto, puedes eliminar la posibilidad de que la afirmación no sea cierta. Esto deja una sola posibilidad, a saber, ¡que la afirmación es cierta!

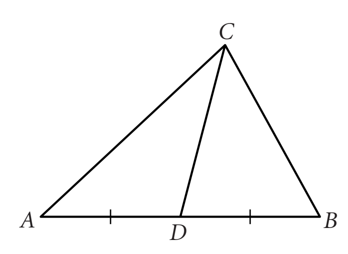
Los Ejemplos A y B de tu libro ilustran cómo funciona una prueba indirecta. Lee estos ejemplos atentamente. El ejemplo siguiente es el Ejercicio 7 de tu libro.

***EJEMPLO*** Prueba que en un triángulo escaleno, la mediana no puede ser la altitud.

▶ ***Solución***

**Dado:** El triángulo escaleno $ABC$ con la mediana $\overline{CD}$

**Demuestra:** $\overline{CD}$ no es la altitud a $\overline{AB}$




**(continúa)**

| **Afirmación** | **Motivo** |
| --- | --- |
| **1.** Supongamos que $\overline{CD}$ *es* la altitud a $\overline{AB}$ | **1.** Supongamos que la proposición *no* es cierta |
| **2.** $\angle CDA$ y $\angle CDB$ son ángulos rectos | **2.** Definición de altitud |
| **3.** $\angle CDA \cong \angle CDB$ | **3.** Teorema de los ángulos rectos congruentes |
| **4.** $\overline{CD}$ es una mediana | **4.** Dado |
| **5.** $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ | **5.** Definición de una mediana |
| **6.** $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ | **6.** Propiedad reflexiva de la congruencia |
| **7.** $\triangle CDA \cong \triangle CDB$ | **7.** Postulado de congruencia SAS |
| **8.** $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ | **8.** CPCTC |

Pero la afirmación $\overline{CA} \cong \overline{CB}$ contradice el hecho de que $\triangle ABC$ es escaleno. Así pues, la suposición de que $\overline{CD}$ es la altitud a $\overline{AB}$ es falsa. Por lo tanto, $\overline{CD}$ *no* es la altitud a $\overline{AB}$.

En el Capítulo 6 descubriste la conjetura de la tangente, que establece que una tangente a un círculo es perpendicular al radio trazado hasta el punto de tangencia. En esta actividad de desarrollo de una prueba probarás esta conjetura y su recíproco de manera indirecta.

## Desarrollo de una prueba: Prueba de la conjetura de la tangente

En la actividad de tu libro se muestran los pasos de una prueba indirecta de la conjetura de la tangente. Completa la investigación por tu cuenta y después compara tus respuestas con las que se muestran a continuación. Los Pasos 9 y 10 son para que los completes por tu cuenta.

**Paso 1** Postulado de las perpendiculares

**Paso 2** Postulado de duplicación de segmentos

**Paso 3** Postulado de rectas

**Paso 4** Dos motivos: $\angle ABO$ y $\angle CBO$ son ángulos rectos debido a la definición de perpendicular. $\angle ABO \cong \angle CBO$ debido al teorema de los ángulos rectos congruentes.

**Paso 5** Propiedad reflexiva de la congruencia

**Paso 6** Postulado de congruencia SAS

**Paso 7** CPCTC

**Paso 8** Está dado que $\overleftrightarrow{AT}$ *es* una tangente.

Después de completar la investigación, añade el teorema de la tangente y su recíproco a tu lista de teoremas.




# Pruebas de los círculos

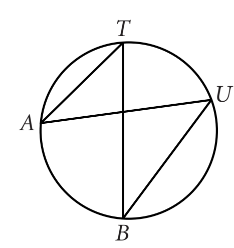
En esta lección

- Aprenderás el **postulado de la suma de los arcos**
- Probarás unas conjeturas que tienen que ver con las propiedades de los círculos

Lee la Lección 13.6 de tu libro. En ella se introduce el postulado de la suma de los arcos y se verifica que la conjetura del ángulo inscrito puede considerarse un teorema. Los ejemplos siguientes son los Ejercicios 1 y 2 de tu libro. Para cada ejemplo, escribe las pruebas por tu cuenta, antes de leer las soluciones.

***EJEMPLO A*** Prueba la conjectura de los ángulos inscritos que intersecan a los arcos: Los ángulos inscritos que intersecan a los mismos arcos o los arcos congruentes son congruentes.

▶ ***Solución*** Divide la afirmacíon en dos casos.



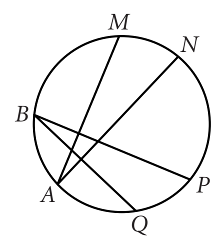

**Caso 1:** Los ángulos intersecan al mismo arco.

**Dado:** $\angle A$ y $\angle B$ intersecan a $\overset{\frown}{TU}$

**Demuestra:** $\angle A \cong \angle B$

**Prueba de párrafo**

Según el teorema de los ángulos inscritos, $m\angle A = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{TU}$ y $m\angle B = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{TU}$. Según la propiedad transitiva de la igualdad, $m\angle A = m\angle B$. Según la definición de los ángulos congruentes, $\angle A \cong \angle B$.




**Caso 2:** Los ángulos intersecan a los arcos congruentes.

**Dado:** $\angle A$ interseca a $\overset{\frown}{MN}$; $\angle B$ interseca a $\overset{\frown}{PQ}$; $\overset{\frown}{MN} \cong \overset{\frown}{PQ}$

**Demuestra:** $\angle A \cong \angle B$

**Prueba de párrafo**

Como $\overset{\frown}{MN} \cong \overset{\frown}{PQ}$, $m\overset{\frown}{MN} = m\overset{\frown}{PQ}$ según la definición de los arcos congruentes. Según la propiedad de multiplicación, $\frac{1}{2}m\overset{\frown}{MN} = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{PQ}$. Según el teorema de los ángulos inscritos, $m\angle A = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{MN}$ y $m\angle B = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{PQ}$. Así pues, según la propiedad transitiva, $m\angle A = m\angle B$. Según la definición de los ángulos congruentes, $\angle A \cong \angle B$.

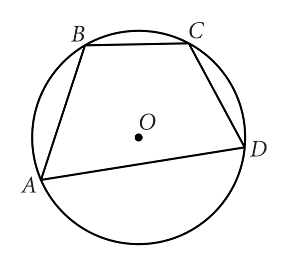
**(continúa)**

**EJEMPLO B** Prueba la conjectura del cuadrilátero cíclico: Los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito son suplementarios.

**Solución**

**Dado:** *ABCD* está inscrito en el círculo *O*

**Demuestra:** $\angle A$ y $\angle C$ son suplementarios; $\angle B$ y $\angle D$ son suplementarios




| **Afirmación** | **Motivo** |
|---|---|
| **1.** $m\angle A = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{BD}$; $m\angle C = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{BAD}$ | **1.** Teorema de los ángulos inscritos |
| **2.** $m\angle A + m\angle C = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{BD} + \frac{1}{2}m\overset{\frown}{BAD}$ | **2.** Propiedad aditiva |
| **3.** $m\angle A + m\angle C = \frac{1}{2}(m\overset{\frown}{BD} + m\overset{\frown}{BAD})$ | **3.** Propiedad distributiva |
| **4.** $m\angle A + m\angle C = \frac{1}{2}$(medida del arco del círculo *O*) | **4.** Postulado de la suma de los arcos |
| **5.** $m\angle A + m\angle C = \frac{1}{2}(360°) = 180°$ | **5.** Definición de la medida de un arco de un círculo |
| **6.** $m\angle A$ y $m\angle C$ son suplementarios | **6.** Definición de suplementario |

Los pasos anteriores pueden repetirse para $\angle B$ y $\angle D$. Por lo tanto, los ángulos opuestos de *ABCD* son suplementarios.




# Pruebas de la semejanza

En esta lección

- Aprenderás las **propiedades de la semejanza**
- Probarás unas conjeturas que tienen que ver con la semejanza

Las propiedades de la igualdad y la congruencia pueden extenderse a la semejanza. Lee las propiedades de la semejanza en la página 730 de tu libro. Para probar las conjeturas sobre la semejanza, necesitas añadir el postulado de la semejanza AA (anteriormente, la conjetura de la semejanza AA) a tu lista de postulados. Este postulado se presenta en tu libro.

En el ejemplo de tu libro, se muestra cómo usar el postulado de la semejanza AA para probar la conjetura de la semejanza SAS. La prueba es bastante complicada, así que léela atentamente, siguiéndola con lápiz y papel. Observa que, para avanzar del Paso 6 al Paso 7, se sustituye $PB$ por $DE$ en el denominador de la razón izquierda. Esto se puede hacer porque $P$ se puso de manera que $PB = DE$.

Aquí se muestran las operaciones algebraicas necesarias para ir del Paso 9 al Paso 10.

| | |
|---|---|
| $\frac{BC}{BQ} = \frac{BC}{EF}$ | Paso 9. |
| $EF \cdot BC = BQ \cdot BC$ | Multiplica ambos lados por $BQ \cdot EF$. |
| $EF = BQ$ | Divide ambos lados entre $BC$. |

Una vez que hayas terminado con el ejemplo y lo comprendas, puedes añadir el teorema de la semejanza SAS a tu lista de teoremas.

## Desarrollo de una prueba: Prueba de la conjetura de la semejanza SSS

En esta actividad probarás la conjetura de la semejanza SSS: Si los tres lados de un triángulo son proporcionales a los tres lados de otro triángulo, entonces los dos triángulos son semejantes.

**Dado:** Dos triángulos con lados correspondientes proporcionales

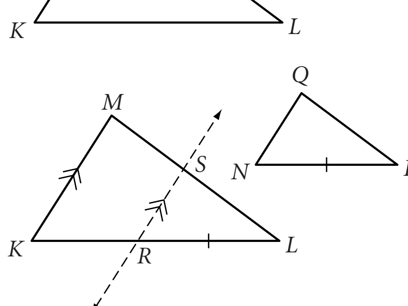
**Demuestra:** Los dos triángulos son semejantes

Lo que se te da y lo que debes demostrar se expresa en términos del diagrama mostrado a la derecha.

**Dado:** $\triangle KLM$ y $\triangle NPQ$ con $\frac{KL}{NP} = \frac{LM}{PQ} = \frac{MK}{QN}$

**Demuestra:** $\triangle KLM \sim \triangle NPQ$

Escribe un plan para la prueba. (*Sugerencia:* Usa una recta auxiliar como la del ejemplo de tu libro.) Después de escribir tu plan, compáralo con el siguiente.




**Plan:** Para demostrar que $\triangle KLM \sim \triangle NPQ$, necesitas demostrar que un par de ángulos correspondientes es congruente. (Demostraremos que $\angle L \cong \angle P$.) Después puedes usar el teorema de la semejanza SAS para probar que los triángulos son semejantes. Usa el mismo método utilizado en el ejemplo. Localiza un punto $R$ en $\overline{KL}$ de manera que $RL = NP$. Después, a través de $R$, construye una recta $\overleftrightarrow{RS}$ paralela a $\overline{KM}$.

(continúa)

Según el postulado CA, $\angle SRL \cong \angle K$ y $\angle RSL \cong \angle M$. Esto significa que $\triangle KLM \sim \triangle RLS$ según el postulado de la semejanza AA. Ahora, si puedes demostrar que $\triangle RLS \cong \triangle NPQ$, entonces $\angle L \cong \angle P$ según CPCTC. Como $\triangle KLM \sim \triangle RLS$, entonces $\frac{KL}{RL} = \frac{LM}{LS} = \frac{MK}{SR}$ según la definición de los triángulos semejantes (CSSTP). Sustituyendo $RL$ por $NP$, tenemos $\frac{KL}{NP} = \frac{LM}{LS} = \frac{MK}{SR}$.

Combinando esto con el hecho dado de que $\frac{KL}{NP} = \frac{LM}{PQ} = \frac{MK}{QN}$, puedes obtener las proporciones $\frac{LM}{PQ} = \frac{LM}{LS}$ y $\frac{MK}{QN} = \frac{MK}{SR}$. Usando algo de álgebra, obtenemos $LS = PQ$ y $SR = QN$. Así pues, $\triangle RLS \cong \triangle NPQ$ según el postulado de la congruencia SSS. Por lo tanto, $\angle L \cong \angle P$ según CPCTC entonces $\triangle KLM \sim \triangle NPQ$ según el teorema de la semejanza SAS.

En el Paso 4 se da parte de una prueba de dos columnas. Completa las razones faltantes, y luego escribe los pasos y los motivos necesarios para completar la prueba. Compara tu prueba completa con la siguiente.

| Afirmación | Motivo |
|---|---|
| **1.** Ubica $R$ de manera que $RL = NP$ | **1.** Postulado de la duplicación de segmentos |
| **2.** Construye $\overleftrightarrow{RS} \parallel \overline{KM}$ | **2.** Postulado de las paralelas |
| **3.** $\angle SRL \cong \angle K$ | **3.** Postulado CA |
| **4.** $\angle RSL \cong \angle M$ | **4.** Postulado CA |
| **5.** $\triangle KLM \sim \triangle RLS$ | **5.** Postulado de la semejanza AA |
| **6.** $\frac{KL}{RL} = \frac{LM}{LS} = \frac{MK}{SR}$ | **6.** CSSTP (Definición de triángulos semejantes) |
| **7.** $\frac{KL}{NP} = \frac{LM}{LS}$ | **7.** Propiedad sustitutiva de la igualdad |
| **8.** $\frac{KL}{NP} = \frac{LM}{PQ}$ | **8.** Dado |
| **9.** $\frac{KL}{NP} = \frac{MK}{SR}$ | **9.** Propiedad sustitutiva de la igualdad |
| **10.** $\frac{KL}{NP} = \frac{MK}{QN}$ | **10.** Dado |
| **11.** $\frac{LM}{LS} = \frac{LM}{PQ}$ | **11.** Propiedad transitiva de la igualdad |
| **12.** $LS = PQ$ | **12.** Propiedades multiplicativa y de la división de la igualdad |
| **13.** $\frac{MK}{SR} = \frac{MK}{QN}$ | **13.** Propiedad transitiva de la igualdad |
| **14.** $SR = QN$ | **14.** Propiedades multiplicativa y de la división de la igualdad |
| **15.** $\overline{LS} \cong \overline{PQ}$, $\overline{SR} \cong \overline{QN}$, $\overline{RL} \cong \overline{NP}$ | **15.** Definición de la congruencia |
| **16.** $\triangle RLS \cong \triangle NPQ$ | **16.** Postulado de la congruencia SSS |
| **17.** $\angle L \cong \angle P$ | **17.** CPCTC |
| **18.** $\triangle KLM \sim \triangle NPQ$ | **18.** Teorema de la semejanza SAS |